

# Guía 4 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Enero, 2012

1. Sean  $f(x) = x^4 - 2x^2$  y  $g(x) = 2x^2$ . Dibuje la región limitada por los gráficos de  $f$  y  $g$ . Además calcule el área de dicha región.
2. Encuentre una función tal que su derivada sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cos(2x)$ . (Ayuda: La respuesta no es la función real definida para cada  $x$  por  $G(x) = \sin(2x)$ )
3. Sea  $n$  en  $\mathbb{Z}$ . ¿Cuál es el valor de la integral  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx$ ?
4. El teorema fundamental del calculo dice que cualquier función continua tiene una función primitiva. Encuentre la primitiva  $F$  de  $f(x) = |x|$ , tal que  $F(0) = 0$ .
5. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua entonces sabemos que la función  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es una función diferenciable en  $(a, b)$ . ¿Qué puede decir de  $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ ?
6. Sea  $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t) dt$ . Demuestre que  $F$  es diferenciable y encuentre  $F'(x)$ . (Ayuda:  $F$  es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)
7. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y positiva. Demuestre que  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es una función inyectiva.
8. Pruebe que para cualquier  $n$  en  $\mathbb{N}$  se tiene que

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n+1}(x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(x) dx.$$

9. Si  $n$  en  $\mathbb{N}$ , ¿se cumple que

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}?$$

10. Encuentre una función  $f$  diferenciable en  $\mathbb{R}$  y un número real  $a$  tal que  $\int_a^x f(t)dt = \cos(x) - \frac{1}{2}$ .
11. Encuentre el área acotada por las curvas  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x - 2$  y el eje  $X$ .
12. Demuestre que  $\int_1^4 \frac{1}{t} dt > 1$ .
13. Sin hacer cálculos explique por que  $\int_{2\pi}^{4\pi} \cos(x)dx = 0$ .
14. Sin hacer cálculos explique por que  $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)dx = \int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx$ .
15. Se estima que dentro de  $x$  meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de  $2 + 6\sqrt{x}$  personas por mes. Si la población actual es de 5000 personas, ¿cuál será la población dentro de 9 meses?
16. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua, biyectiva y creciente tal que  $\int_0^1 f(x)dx = a$ . Calcule  $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$  en función de  $a$ . (Ayuda: Piense por ejemplo en  $f(x) = x^2$  y en  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .)
17. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^3  t dt$	f) $\int_1^4 u\sqrt{u}du$
b) $\int_0^{\pi} \text{sen}(t)dt$	g) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
c) $\int_0^{\pi} t\text{sen}(t)dt$	h) $\int_{\pi}^{2\pi} u\cos(u^2)du$
d) $\int_0^{\pi} \cos(x)\text{sen}(x)dx$	i) $\int_0^1 x\sqrt{2-x}dx$
e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(z)dz$	j) $\int_0^{\pi} t^2\text{sen}(t)dt$

18. Calcule las siguientes primitivas:

a) $\int \cos^2(x)dx$	f) $\int 5x \text{sen}(x^2)dx$
b) $\int \frac{1}{1+\text{sen}(x)}dx$	g) $\int \frac{x}{\sqrt{x(1+x)}}dx$
c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$	h) $\int x\sqrt{1+x}dx$
d) $\int x \sec^2(x^2 + 3)dx$	i) $\int \sqrt{1-x^2}dx$
e) $\int x^2 \cos(x)dx$	