Guía 2 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2012

1. Utilize regla de L'Hopital para determinar la existencia o no de los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(px)}{\tan(qx)}$

   d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$

   f) $\lim\limits_{x\to 0} \csc(x)-\cot(x)$

   g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

   h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

   i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$

   j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{x}$

   k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+3x}-x$

2. Sea f una función continua en $[3,5]$ y derivable en $(3,5)$ tal que $f(3)=6$ y $f(5)=10$. Para cada x en $[3,5]$ defina

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

   Demuestre que existe x_0 en $(3,5)$ tal que $g'(x_0)=0$. Además muestre que la recta tangente a la gráfica de f en x_0 pasa por el punto $(0,0)$.

3. ¿En qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ la recta tangente tiene la pendiente más grande?.

4. Un rectángulo tiene su base sobre el eje X y los vértices del lado paralelo a la base se encuentran sobre la parábola $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ con $y \geq 0$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima?.

5. Una ventana tiene forma de un rectangulo coronado por un semicirculo. Encuentre las dimensiones de la ventana que permite admitir más luz, suponiendo que el perimetro debe ser de 5 metros.

6. La altura de un triángulo equilatero aumenta a razón de 3 cm/seg. ¿A qué razón aumenta su área?.
(Ayuda: El área de un triángulo equilatero de lado a es $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.)

7. Una escalera de 50 metros de largo se desliza por una pared vertical de 15 metros de alto. Si la velocidad con que se desliza el extremo superior es constante e igual a 2 metros por segundo, encuentre la velocidad con que se desplaza el extremo inferior en el instante en que el extremo superior esta a 3 metros del suelo.

8. Grafique la función $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ indicando máximos, mínimos, intersectos con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad y asíntotas.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Determine $f'(x)$.

10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Demuestre que f es una función derivable en su dominio.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 10\operatorname{sen}(x)$. Demuestre que existe c en $\mathbb{R}$ tal que $f(c) = 1000$.

12. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(1)$. Demuestre que existe ξ en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

13. Un monje parte a las 6:00 de la manana desde la cima del monte donde está su monasterio, hasta llegar al monasterio del valle a las 22:00 horas del mismo día. Realiza sus oraciones y se duerme. Al otro día, parte a las 6:00 de la manana del monasterio del valle y sube al monasterio del monte, tomando exactamente el mismo sendero que el día anterior. Al monasterio del monte llega a las 22:00 de ese mismo día. ¿ Es cierto que hay una hora en que ambos días estaba exactamente en el mismo punto del sendero?.