Guía 1 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2012

1. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua y biyectiva con $f(0) = 0$. Demuestre que $f(1) = 1$.

2. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Demuestre que existe c en $[0,1]$ tal que $f(c) = c$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \neq 0$ y $f(\pi) = -1$. Demuestre que $f(x) < 0$ para todo x en $\mathbb{R}$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^3 + x + 1$. Encuentre un intervalo de largo $1/4$ que contenga una raíz de esa función polinomial.

5. Determine la función afín que mejor aproxima a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ cerca del origen.

6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$. Determine si f es diferenciable.

7. Sea f diferenciable en a, calcule el siguiente límite en terminos de $f'(a)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

8. Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2 - 1})$. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(2, f(2))$.

9. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = \tan^2(\sec^3(\sqrt{\pi x}))$

   b) $f(x) = x^2 \cos(\operatorname{arc\,sen}(x^2 - 3))$

10. Suponga que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0 (no necesariamente diferenciable). Pruebe que f es diferenciable en 0 y encuentre $f'(0)$ en terminos de g.

11. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tales que $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \geq g'(x)$ para todo x en $\mathbb{R}$. Demuestre que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x > 0$.

12. Se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba a una velocidad constante de 600 m/h. A 50 metros del punto de lanzamiento se encuentra un observador que sigue la trayectoria del proyectil. Determine la razón de cambio instantanea del ángulo de elevación del observador, cuando el proyectil ha recorrido 100 metros.

13. Un nadador se lanza desde un trampolín de altura 32 pies sobre el nivel de la piscina. La posición del nadador después de t segundos desde que salto es $h(t) = -16t^2 + 16t + 32$ pies. Determine la velocidad del nadador en el momento que impacta el agua.

14. Un mecanismo circular hace mover un pistón, de tal forma que en el segundo t su posición es $x(t) = 5 + 3\cos(2t)$.

    a) Calcule la velocidad del pistón en cada segundo t.

    b) Determine la máxima velocidad del pistón.

15. Los Ichthyosaurus fueron un grupo de reptiles marinos comparable en tamano a los actuales delfines. Ellos se extinguieron durante el Cretaceo. Basado en el estudio de algunos fósiles se encontró la siguiente relación

    $$C(x) = (1,262)[E(x)]^{0,9}$$

    donde $C(x)$ es el largo del cráneo a la edad x y $E(x)$ es el largo de la espina dorsal a la edad x. Calcule $\frac{C'(x_1)}{C(x_1)}$ en el momento en que $\frac{E'(x_1)}{E(x_1)} = 1$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y los valores de x donde f alcanza máximos y mínimos.

17. Determine cuál es el punto de la curva $y = \frac{1}{x}$ en el primer cuadrante que está mas cerca del origen.

18. Se requiere cerrar un potrero de forma rectangular, donde uno de los lados es el borde de un río, para que los animales beban agua. Se dispone de 10000 metros de alambre y el cerco debe ser de tres corridas de alambre. Determine las dimensiones del potrero de mayor área que se puede cercar con el alambre.

19. La reacción del cuerpo a las drogas con frecuencia está dada por una relación del tipo
$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$
donde D es la dosis y C (una constante) es la dosis máxima que puede administrarse. La razón de cambio de $R(D)$ con respecto a D se denomina *sensibilidad*. Encuentre el valor de D para el que la sensibilidad es máxima.

20. Una de las leyes de Poiseuille afirma que la velocidad de circulación de la sangre bajo presión constante en un vaso sanguíneo a una distancia r del centro del vaso está dada por
$$v = \frac{K}{L}(R^2 - r^2)$$
donde K es una constante positiva, R el radio del vaso y L la longitud de éste.[1]Supóngase que L es fijo y que R disminuye a una tasa 0,0012 $\frac{mm}{min}$¿Cuál es la tasa de circulación interna entre el centro del eje y la pared interior del vaso sanguíneo cuando R es 0,007 mm?

21. Una mancha circular de aceite se extiende de modo que su radio aumenta a una tasa de 15 $\frac{m}{h}$ ¿Cuán rápido cambia el área de la mancha cuando el radio es 60 m?

22. Un cono recto de altura 3 m y radio superior 1 m, está lleno de agua. En cierto instante se rompe la punta inferior del cono y deja caer agua a 1 $\frac{cm^3}{seg}$. ¿Cuál es la tasa con que cambia la altura del nivel del agua cuando esta es de 2 m?

23. Para estimar la cantidad de madera que produce el tronco de un árbol, es razonable suponer que el tronco es un cono trunco. Si el radio superior del tronco es r, el inferior es R y la altura es H, el volumen de madera está dada por
$$V = \frac{\pi}{3}H(R^2 + rR + r^2).$$
Si r, R y H se incrementan a tasas de 10 $\frac{cm}{\text{ano}}$, 8 $\frac{cm}{\text{ano}}$ y 23 $\frac{cm}{\text{ano}}$, respectivamente,¿a qué tasa aumenta el V respecto al tiempo cuando $r = 66\ cm$, $R = 100\ cm$ y $H = 496\ cm$?

[1]E. Batschelet, Introduction to Mathematics for Life Scientists, 2a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1976.)

24. Una escalera de 10 m de largo está apoyada en una pared. En cierto momento comienza a resbalar. Si la parte superior (la que está apoyada en la pared) baja a razón de 20 cm/seg.¿A que velocidad se aleja la parte inferior de la escalera de la pared?

25. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable.

26. Demuestre que la función $f : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{tg(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable.

27. Pruebe que toda función continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que posee derivada nula en todos los puntos x de (a, b) es constante.

28. Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, derivables en (a, b) y tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo x en (a, b). Pruebe que existe c en $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo x en $[a, b]$.

29. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b). Si existe k en $\mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo x en $[a, b]$ entonces pruebe que para todo x e y en $[a, b]$ se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

30. Grafique $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ para cada uno de los sigientes casos.

    a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, donde $D = \mathbb{R}$.

    b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, donde $D = \mathbb{R}$.

    c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, donde $D - \{1\}$.

    d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$, donde $D = \mathbb{R}$.

    e) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, donde $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.