Pauta Prueba Global de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 10 de Marzo, 2012

1. *a*) Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar en torno al eje x, la región comprendida entre las las curvas $y = x$ e $y = x^3$ con $x \geq 0$.

   Solución: El volumen V del sólido pedido, está dado por la siguiente expresión

   $$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx$$

   Los límites de integración quedan completamente definidos de la igualdad $x = x^3$ con $x \geq 0$.

   $$\boxed{\text{1 punto.}}$$

   Integrando se tiene que

   $$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^6 dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} |_0^1 \right) - \pi \left(\frac{x^7}{7} |_0^1 \right) \\ &= \frac{4\pi}{21} \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

   b) Calcule la longitud de la curva $y = \ln(\sec(x))$ para x en $[0, \frac{\pi}{4}]$. (Ayuda: $\int \sec(x) dx = \ln(\sec(x) + \tan(x)) + C$)

   Solución: La longitud L de la curva pedida, está dada por la siguiente expresión

   $$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + ((\ln(\sec(x)))')^2} dx$$

   $$\boxed{\text{1 punto.}}$$

   donde $(\ln(\sec(x)))' = \frac{1}{\sec(x)} (\sec(x))' = \frac{1}{\sec(x)} \sec(x) \tan(x) = \tan(x)$. Por tanto se tiene que $((\ln(\sec(x)))')^2 = \tan^2(x)$, luego

   $$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2(x)} dx$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Integrando se tiene que

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2(x)}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2(x)}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)dx \\
&= \ln(\sec(x)+\tan(x))|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln(\sec(\frac{\pi}{4})+\tan(\frac{\pi}{4}))-\ln(\sec(0)+\tan(0))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

2. *a*) Analice si la siguiente integral impropia converge o diverge. Justifique su respuesta.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$$

<u>Solución:</u> Notar que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx &= \lim_{b\to-\infty} \int_b^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx \\
&= \lim_{b\to-\infty} -\int_{2-b}^{3} \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \lim_{b\to-\infty} -(2\sqrt{u}|_{2-b}^{3}) \\
&= \lim_{b\to-\infty} -2\sqrt{3}+2\sqrt{2-b} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

Por tanto la integral impropia diverge.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

b) Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{te^t}{y\sqrt{1+y^2}}$$

Solución: Notar que separando variables se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{te^t}{y\sqrt{1+y^2}} \Leftrightarrow y\sqrt{1+y^2}dy = te^t dt$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Integrando se tiene que

$$\begin{aligned}
\int y\sqrt{1+y^2}dy = \int te^t dt \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int \sqrt{1+y^2}2ydy = \int te^t dt \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \int te^t dt \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c_1\right) = te^t - \int e^t dt \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3} + \frac{1}{2}c_1 = te^t - e^t + c_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3} = te^t - e^t + k \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + y^2 = \sqrt[3]{(3(te^t - e^t))^2} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\sqrt[3]{(3(te^t - e^t))^2} - 1}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1)$.

   a) ¿Es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente? Justifique su respuesta.
   Solución: Note que

$$a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1) = \ln\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right) = \ln\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ y $\ln(x)$ es una función continua, se tiene que

$\boxed{\text{1 punto.}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \ln(2)$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente.

   b) ¿Converge o diverge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$? Justifique su respuesta.

   Solución: Por *a*) sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln(2)$ y $\ln(2) \neq 0$, por tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{\text{3 puntos.}}$