Taller de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Enero y Febrero, 2012

Nota 1: El siguiente taller es optativo. Puede trabajar en forma individual o grupal (grupos de nos más de 5 alumnos). La fecha de entrega es el lunes 5 de Marzo del 2012 y la nota obtenida en él remplaza las dos notas más bajas de controles.

Las series de funciones más importantes en el Cálculo son las del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

llamada *series de potencias*. Nuestro interés es estudiar para que valores de x en $\mathbb{R}$, una serie de potencia converge. Es decir dada una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

se quiere buscar cuál es el conjunto D de números reales donde la serie de potencia converge y por tanto definir $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

En ese sentido podríamos preguntarnos por el recíproco de lo anterior mencionado, o sea dada una función f, buscar los valores de su dominio para los cuales ella se puede representar por una serie de potencia. Esto último es un hecho muy importante y utilizado en el Cálculo y más generalmente en el Análisis.
Es fácil ver que dada una serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ella converge en $x = x_0$ a el número real a_0. El valor x_0 se llama el *centro de la serie de potencia*. Note además que toda serie de potencia puede ser llevada a una serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

haciendo un cambio de variable, a saber $y = x - x_0$.

Dada una serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

el conjunto de los valores de x para los cuales ella converge es un intervalo centrado en x_0 cerrado, abierto o semi abierto, incluso este conjunto puede ser el conjunto de los números reales o el conjunto formado solo por su centro.
Se puede demostrar que dada una serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ella converge solo en $x = 0$ o existe $r > 0$ tal que la serie converge absolutamente en el intervalo $(-r, r)$ y diverge fuera del intervalo $[-r, r]$ o la serie converge en toda la recta real. El número r se llama **radio de convergencia** de la serie. Cuando la serie converge solo en su centro, decimos que tiene radio de convergencia 0 y cuando converge en toda la recta real, decimos que tiene radio de convergencia infinito.

Ejercicio 1: Dada una serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

investigue como poder determinar el conjunto D, de todos los valores reales para los cuales ella converge y como determinar su radio de convergencia. Luego encuentre el conjunto D y el radio de convergencia r para las siguientes series de potencias.

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

Una serie de potencia con radio de convergencia r converge uniformemente en todo intervalo $[-k, k]$, con $0 < k < r$. Luego si $r > 0$, la función $f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es continua. Por tanto si $[a, b] \subset (-r, r)$ entonces f es integrable en $[a, b]$ con

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

También se tiene que f es derivable en $(-r, r)$ con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

con radio de convergencia r.

Las series de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ convergen para todo x en $\mathbb{R}$ (ambas series tienen radio de convergencia infinito), luego podemos bién definir las funciones $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Notar que $c(0) = 1$, $s(0) = 0$, $c(-x) = c(x)$ y $s(-x) = -s(x)$. Derivando se tiene que $c'(x) = -s(x)$ y $s'(x) = c(x)$. Por último la función

$$f(x) = c^2(x) + s^2(x)$$

tiene derivada

$$f'(x) = 2c(x)c'(x) + 2s(x)s'(x) = -2c(x)s(x) + 2s(x)c(x) = 0$$

entonces f es constante y como $f(0) = 1$, se tiene que

$$c^2(x) + s^2(x) = 1$$

para todo x en $\mathbb{R}$. Se manera similar se puede probar que

$$s(x + y) = s(x)c(x) + c(x)s(y)$$

y

$$c(x + y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

Si probamos otras propiedades de estas funciones, como por ejemplo que $s(x+2\pi) = s(x)$ y $c(x+2\pi) = c(x)$, podemos concluir que $c(x) = \cos(x)$ y $s(x) = \operatorname{sen}(x)$. Es decir las funciones seno y coseno se pueden representar en todo $\mathbb{R}$ por las series de potencias dadas inicialmente, esto es

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Ejercicio 2: Utilize la integración termino a termino, la derivación termino a termino y series de potencias conocidas para demostar las siguientes proposiciones.

1. Para todo x en $\mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. Para todo x en $\mathbb{R}$ con $|x| < 1$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

3. Para todo x en $\mathbb{R}$ con $|x| < 1$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

4. Para todo x en $\mathbb{R}$ con $|x| < b$, $\frac{a}{b+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{b} \left(\frac{-x}{b}\right)^n$

5. Para todo x en $\mathbb{R}$, $\operatorname{senh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Nota 2: Tenga presente que para la realización de este taller, es suficiente la buena comprensión de él más los contenidos de series vistos en clases. Sin embargo se sugieren los siguientes textos:

1. **Larson-Hostetler, Cálculo y Geometría Analítica.**

2. **J. Stewart, Cálculo. Trascendentes Tempranas.**

3. **M. Spivak, Cálculo Infenitesimal.**

Nota 3: El formato de entrega del taller es escrito. Sin embargo debe tener presente la posibilidad de exponer el trabajo. En el caso de los grupos se eligirá al azar a un representante. Los grupos entregan sólo un taller resuelto.