Pauta Prueba Parcial 2 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 14 de Enero, 2012

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-x}$.

   a) Considere la partición $P = \{t_k = k : k = 0, \ldots, n\}$ del intervalo $[0, n]$. Encuentre $s(f, p)$.

   Solución:

   Notemos $f(x) = e^{-x}$ es continua en su dominio, puesto que es compuesta de funciones continuas. Además $f'(x) = -e^{-x}$, luego $f'(x) < 0$ para todo x en $\mathbb{R}$, lo que equivale a decir que f es una función decreciente en su dominio.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Luego para todo $k = 1, \ldots, n$, se tiene que

   $$m_k = inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\} = f(t_k) = f(k) = e^{-k}$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Por lo tanto

   $$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}(k-(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \frac{1}{e} + \ldots + \frac{1}{e^n}$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   b) Demuestre que para todo n en $\mathbb{N}$,

   $$\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n} \leq 1 - \frac{1}{e^n}$$

   Solución:

   Sabemos que

   $$s(f,P) \leq \int_0^n f(x)dx$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Ahora notar que

   $$\int_0^n f(x)dx = \int_0^n e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^n = -e^{-n} + e^0 = 1 - \frac{1}{e^n}$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego como n en $\mathbb{N}$ es arbitario, se tiene que

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n} \leq 1 - \frac{1}{e^n}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. *a*) Considere la región acotada R del plano limitada entre las curvas $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 4 - x^2$. Calcule el área de la región R.

   Solución:

   Graficando en el plano las curvas f y g, vemos que la región R es la región encerrada por las curvas g y f, la cuál queda completamente determinada por los puntos en los cuales se intersectan dichas curvas, es decir, los valores de x en $\mathbb{R}$ tales que $f(x) = g(x)$ o sea en $x = -2$ y en $x = 1$.

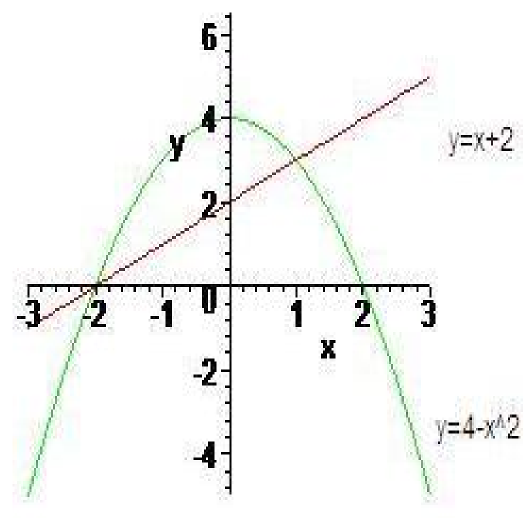

Figura 1: Regin Acotada entre las curvas

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Sea $A(R)$ el área de la región R, entonces se tiene que

$$A(R) = \int_{-2}^{1} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-2}^{1} g(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

donde

$$\int_{-2}^{1} g(x)dx = \int_{-2}^{1} (4 - x^2)dx = \int_{-2}^{1} 4dx - \int_{-2}^{1} x^2dx = 12 - 3 = 9$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{1} (x + 2)dx = \int_{-2}^{1} xdx + \int_{-2}^{1} 2dx = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

Por tanto

$$A(R) = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

b) Si $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ y $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$, encuentre el valor de $F''(2)$.

Solución:

Por teorema fundamental del calculo se tiene que f es derivable y por tanto continua, lo que implica que F es derivable.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego $F'(x) = f(x)$ y $F''(x) = f'(x)$. Notar que $f(t) = G(g(t))$, donde $G(t) = \int_1^t \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$ y $g(t) = t^2$, luego

$$f'(t) = G'(g(t))g'(t) = \frac{\sqrt{1+t^8}}{t^2} 2t = 2\frac{\sqrt{1+t^8}}{t}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por tanto

$$F''(2) = 2\frac{\sqrt{1+2^8}}{2} = \sqrt{257}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

3. *a*) Calcule la familia de primitivas de

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$$

Solución:

Sea $u = \ln(x)$ entonces $du = \frac{1}{x}dx$, luego

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

con C en $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por tanto

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx = \frac{(\ln(x))^3}{3} + C$$

con C en $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

b) Sea f una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y sea F una primitiva de f. Calcule el valor de

$$\int_0^1 e^x (F(x) + f(x)) dx$$

Sugerencia: Separe la integral y ocupe integración por parte.

<u>Solución:</u>

Notar que

$$\int_0^1 e^x(F(x)+f(x))dx = \int_0^1 e^x F(x)dx + \int_0^1 e^x f(x)dx$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Usamos integración por partes para la integral $\int_0^1 e^x F(x)dx$. Sea $u = F(x)$ y $dv = e^x dx$ entonces $du = F'(x)dx = f(x)$ y $v = e^x$. Luego

$$\int_0^1 e^x F(x)dx = F(x)e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x f(x)dx$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x(F(x)+f(x))dx &= e^x F(x)|_0^1 - \int_0^1 e^x f(x)dx + \int_0^1 e^x f(x)dx \\ &= eF(1) - F(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$