

Guía 3 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Diciembre, 2011

1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y P una partición de $[a, b]$. ¿Qué relación hay entre $\int_a^b f(t)dt$ y $S(f, P)$ y entre $\int_a^b f(t)dt$ y $s(f, P)$?
2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Encuentre n en \mathbb{N} tal que $S(f, P_n) - s(f, P_n) < 10^{-3}$, donde

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

3. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables, ¿Es cierto que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right)$$
?
4. Si f es par y $\int_0^a f(t)dt = A$. Calcule $\int_{-a}^a f(t)dt$, en términos de A .
5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$. Demuestre que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
6. Sea f continua y no negativa en $[a, b]$ tal que existe ξ en $[a, b]$ con $f(\xi) > 0$, entonces pruebe que $\int_a^b f(x)dx > 0$.
7. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que para cualquier partición P se tiene que $S(f, P) = s(f, P)$. ¿Es f una función constante?
8. Considera n en \mathbb{N} y define $I_n = \int_0^n [x]dx$. Encuentre el valor de I_n en términos de n .
9. Para cada x en \mathbb{R} define $I(x) = \int_0^x [t]dt$. Grafica I .
10. Si f es continua en $[a, b]$ y si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces pruebe que existe ξ en $[a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.