Pauta Prueba Parcial 1 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 17 de Diciembre, 2011

1. Demuestre que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x = 0$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\sqrt{2}x) - \cos(\sqrt{3}x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x) - \cos(\sqrt{3}x)}{x^2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Si $x \to 0$, vemos que $\frac{\cos(\sqrt{2}x) - \cos(\sqrt{3}x)}{x^2}$ es del tipo $\frac{0}{0}$, luego podemos aplicar regla de L'Hopital y se tiene que

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\sqrt{2} + \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)\sqrt{3}}{2x}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Si $x \to 0$, vemos que $\frac{-\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\sqrt{2} + \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)\sqrt{3}}{2x}$ es del tipo $\frac{0}{0}$, entonces aplicamos nuevamente regla de L'Hopital y se tiene que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(\sqrt{2}x)2 + \cos(\sqrt{3}x)3}{2} \\ &= \frac{-2 + 3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$(x^2+y^2+4)^2-16x^2=36$$

en el punto $(2,\sqrt{2})$.

Solución:

Sea $y=mx+b$ la ecuación de la recta tangente a la curva

$$(x^2+y^2+4)^2-16x^2=36$$

en el punto $(2,\sqrt{2})$. Derivando implícitamente respecto de x, se tiene que

$$\begin{aligned} 2(x^2+y^2+4)(2x+2yy')-32x=0 &\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+4)(2x+2yy')=32x \\ &\Leftrightarrow 2x+2yy'=\frac{32x}{2(x^2+y^2+4)} \\ &\Leftrightarrow 2yy'=\frac{32x}{2(x^2+y^2+4)}-2x \\ &\Leftrightarrow y'=\frac{1}{2y}\left[\frac{32x}{2(x^2+y^2+4)}-2x\right] \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por tanto $m=y'|_{(2,\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{32\cdot 2}{2(4+2+4)}-2\cdot 2\right]=\frac{-\sqrt{2}}{5}$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Luego $y=mx+b\Leftrightarrow y=\frac{-\sqrt{2}}{5}x+b$. Como $(2,\sqrt{2})$ pertenece a la recta tangente se tiene que $\sqrt{2}=\frac{-\sqrt{2}}{5}\cdot 2+b\Leftrightarrow b=\frac{7\sqrt{2}}{5}$. Así la ecuación de la recta tangente a la curva $(x^2+y^2+4)^2-16x^2=36$ en el punto $(2,\sqrt{2})$ es $y=\frac{-\sqrt{2}}{5}x+\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

3. Dos lados de un triángulo miden 4 y 5 centímetros y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de $0,06$ radianes por segundo. ¿A qué razón cambia el área del triángulo cuando el ángulo entre los lados de longitudes 4 y 5 centímetros es de $\frac{\pi}{3}$ radianes?

Solución:

Sea $\theta(t)$ el ángulo entre los lados de longitudes 4 y 5 centímetros, entonces es claro que el área del triángulo depende de este ángulo. Podemos ver que el área del triángulo en cuestión viene dada por

$$A(t)=\frac{4\cdot 5\operatorname{sen}(\theta(t))}{2}=10\operatorname{sen}(\theta(t))$$

Esto se puede ver al trazar la altura h que llega al lado de longitud 4 centímetros, luego $\text{sen}(\theta(t)) = \frac{h}{5}$, de donde despejando h en función de $\theta(t)$ y sabiendo que el área del triángulo es $A = \frac{4h}{2}$ se obtiene la relación mencionada.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Derivamos $A(t)$ respecto de t se tiene que

$$A'(t) = 10\cos(\theta(t))\theta'(t)$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Luego reemplazando en el momento en que $\theta(t) = \frac{\pi}{3}$ se obtiene que

$$A'(t) = 10\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 0,006 = 0,3$$

Por tanto el área del triángulo cambia a razón de $0,3$ centímetros cuadrados por segundo cuando el ángulo entre los lados de longitudes 4 y 5 centímetros es de $\frac{\pi}{3}$ radianes.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

4. La función $f(x) = ax^3 + bx + 2$ alcanza un máximo relativo o local en $x = 1$, además $f(1) = 4$. Encuentre los valores de a y b.

   Solución:

   Si $x = 1$ es un máximo relativo entonces $f'(1) = 0$, donde $f'(x) = 3ax^2 + b$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Luego se tiene el sistema

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 4 \\ f'(1) & = & 0 \end{array}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{array}{rcl} a + b + 2 & = & 4 \\ 3a + b & = & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Resolviendo el sistema se tiene que $a = -1$ y $b = 3$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

5. Se desea que las páginas de un libro tengan área de 900 cm^2 con margenes de $2,5$ cm abajo y a los lados y de $1,5$ cm arriba. Determine las dimensiones de la página que darán la mayor área posible para el texto.

Solución:

Sean x e y las dimensiones de la página entonces es fácil ver que $x = 2,5 + a + 2,5 = a + 5$ e $y = 2,5 + b + 1,5 = b + 4$, donde a y b son las dimensiones del rectangulo en el interior de la página disponible para el texto. Determinaremos los valores de a y b que darán la mayor área posible para el texto y así obtendremos las dimensiones x e y de la página.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Sabemos que el área del rectangulo de lados a y b es $A = ab$, además $xy = 900$, es decir $(a+5)(b+4) = 900$, lo que implica que $a = \frac{900}{b+4} - 5$. Por tanto el área del rectangulo en cuestión es $A(b) = \left(\frac{900}{b+4} - 5\right) b$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego debemos ver para qué valores de b, la función $A(b)$ alcanza máximos. En efecto, notamos que $A(b) = \frac{900b}{b+4} - 5b$ entonces se tiene que $A'(b) = \frac{3600}{(b+4)^2} - 5 = \frac{3600-5(b+4)^2}{(b+4)^2}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego $A'(b) = 0 \Leftrightarrow 3600 - 5(b+4)^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 + 8b - 704 = 0$. Resolviendo la ecuación se tiene que $b = -4 + 12\sqrt{5}$ o $b = -4 - 12\sqrt{4}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como b es una medida, sólo analizamos el valor positivo $b = -4+12\sqrt{5}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Vemos que $A''(b) = 3600 \cdot -2(b+4)^{-3} = \frac{-7200}{(b+4)^3}$, luego evaluando $b = -4 + 12\sqrt{5}$, se tiene que $A''(-4+12\sqrt{5}) = \frac{-7200}{(-4+12\sqrt{5}+4)^3} < 0$. Entonces A alcanza un máximo en $b = -4 + 12\sqrt{5}$. De esta forma $a = 15\sqrt{5} - 5$ centímetros y $b = 12\sqrt{5} - 4$ centímetros, lo que implica que las dimensiones de la página deben ser $x = 15\sqrt{5}$ centímetros e $y = 12\sqrt{5}$ centímetros.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

6. Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) tal que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para todo x en (a,b). Demuestre que $f(b) < g(b)$. **Sugerencia: Aplique teorema del valor medio a la función** $h = f - g$

   Solución:

   La función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), puesto que f y g lo son. Entonces por teorema del valor medio existe c en (a,b) tal que

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{f(b) - g(b) - f(a) + g(a)}{b - a}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

   Como $f(a) = g(a)$ se tiene que $h'(c) = \frac{f(b)-g(b)}{b-a}$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

   Por otro lado, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ y $f'(x) < g'(x)$ para todo x en (a,b), lo que implica que $h'(x) < 0$ para todo x en (a,b).

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

   En particular $h'(c) < 0$. Por tanto $\frac{f(b)-g(b)}{b-a} < 0$, pero $b-a > 0$ entonces se tiene que $f(b) - g(b) < 0$, es decir $f(b) < g(b)$.

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$