Pauta Control 1 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 21 de Noviembre, 2011

1. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Demuestre que existe ξ en $(0,1)$ tal que $f(\xi) = \xi$.

   Solución:

   Consideremos la función $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = f(x) - x$, entonces F es continua puesto que es diferencia de funciones continuas.

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   Además $F(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$ y $F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$.

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   Luego por teorema del valor intermedio o Bolzano se tiene que existe ξ en $(0,1)$ tal que $F(\xi) = 0$, es decir $f(\xi) = \xi$.

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x+7|$. Determine si f es derivable en su dominio.

   Solución:

   Notar que

$$f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{si } x \geq -7 \\ -x-7 & \text{si } x < -7 \end{cases}$$

   entonces f es derivable en $a \neq -7$, puesto que $x+7$ y $-x-7$ son derivables.

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   Luego debemos analizar en $a = -7$, es decir veamos si existe

$$\lim_{x \to -7} \frac{f(x) - f(-7)}{x+7} = \lim_{x \to -7} \frac{|x+7|}{x+7}$$

Basta notar que

$$\lim_{x \to -7^-} \frac{|x+7|}{x+7} = \lim_{x \to -7^-} \frac{-(x+7)}{x+7} = -1$$

y

$$\lim_{x \to -7^+} \frac{|x+7|}{x+7} = \lim_{x \to -7^+} \frac{x+7}{x+7} = 1$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por tanto f no es derivable en $a = -7$. Concluimos entonces que f no es derivable en su dominio.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$