

FUNCIONES LÓGICAS

- Lógica

- Rama de la ciencia que se encarga de la representación del conocimiento.
- Utiliza formalismos matemáticos de representación y cálculo.

- Álgebra de Boole

- Diseñada como formalismo matemático sencillo de representación del conocimiento y realización de cálculos.
- Tiene aplicación directa en el cálculo proposicional (lógica clásica).

ELEMENTOS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- Valores: $\begin{cases} V \rightarrow 1 \\ F \rightarrow 0 \end{cases}$: lógica bivaluada (binaria)
- Constantes (elementos de valor fijo): $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$
- Variables:
 - * Elementos cuyo valor puede cambiar.
 - * Se designan por letras.

OPERACIONES EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE

- Son reglas de combinación de elementos que permiten hacer cálculos.
- Se representan mediante operadores.
- Operaciones básicas:
 - Adición o unión: $A+B$
 - Producto o intersección: $A \cdot B$
 - Complementación o inversión: A' , \overline{A}

EXPRESIONES

- Combinación de constantes, variables y operadores: $A \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot 1 + [\overline{A} \cdot (\overline{B} + 1)]$

FUNCIONES

- Son expresiones con variables: $f(A,B,C,...): f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
- La evaluación de una función booleana da como resultado una variable booleana (su valor será diferente dependiendo de los valores de las variables que la componen).
- Tablas de verdad: se usan para representar los valores adoptados por las funciones de acuerdo con los valores de las variables.
- Las funciones lógicas se corresponden con circuitos lógicos.

OPERACIONES BÁSICAS EN ÁLGEBRA DE BOOLE

- Adición, unión o función O (OR): $f(A,B) = A+B$
- Producto, intersección o función Y (AND): $f(A,B) = A \cdot B$
- Complementación, negación o función NO (NOT): $f(A) = A' = \overline{A}$

A	B	A+B	A·B	A	A'
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0		
1	1	1	1		

- Otras operaciones:

- Función ON (NOR): $f(A,B) = \overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- Función YN (NAND): $f(A,B) = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
- Función O exclusiva (XOR): $f(A,B) = A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
- Función equivalencia (XNOR): $f(A,B) = A \Delta B = \overline{A \oplus B} = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$

TEOREMAS EN ÁLGEBRA DE BOOLE

- Teorema de dualidad: a cada ley lógica le corresponde una dual construida intercambiando + con \cdot y 1 con 0.

$A+A' = 1$	$A \cdot A' = 0$	identidad
$0+A=A$	$1 \cdot A=A$	elemento neutro
$1+A=1$	$0 \cdot A=0$	
$A+A=A$	$A \cdot A=A$	idempotencia
$A+B = B+A$	$A \cdot B = B \cdot A$	conmutativa
$A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$	asociativa
$A+B \cdot C = (A+B) \cdot (A+C)$	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	distributiva
$A+A \cdot B = A$	$A \cdot (A+B) = A$	absorción
$(A+B)' = A' \cdot B'$	$(A \cdot B)' = A' + B'$	De Morgan
$(A')' = A$		involución

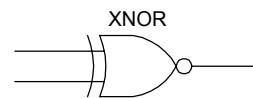
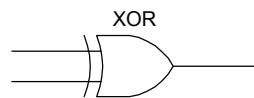
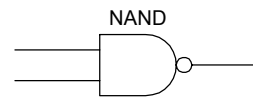
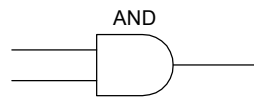
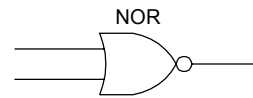
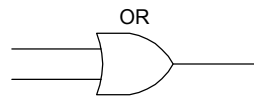
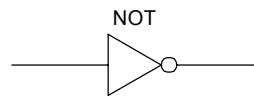
- Ley de De Morgan generalizada: la inversa de una función se obtiene complementando todas las variables que aparecen en ella e intercambiando los operadores de adición y producto.

- Teorema de la descomposición de funciones:

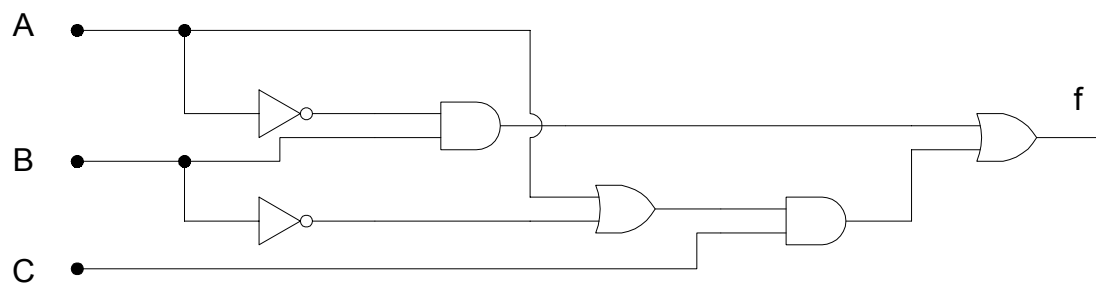
$$f(A,B,C,\dots) = A \cdot f(1,B,C,\dots) + \overline{A} \cdot f(0,B,C,\dots)$$

$$f(A,B,C,\dots) = [A + f(0,B,C,\dots)] \cdot [\overline{A} + f(1,B,C,\dots)]$$

FUNCIONES Y PUERTAS LÓGICAS



Ej: $f(A,B,C) = \overline{A} \cdot B + C \cdot (A + \overline{B})$



REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

- Expresión algebraica (EA)
- Tabla de verdad (TV)
- Mapa de Karnaugh (MK)

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- Combinación de constantes, variables y operadores.

$$\text{Ej: } f(A, B, C) = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B + \overline{C} \cdot (A + B)$$

- La expresión algebraica de una función lógica no es única.

PRIMERA FORMA CANÓNICA (1FC)

Minterm (m_i):

Dada una función lógica $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un minterm es un término de la misma constituido por el producto de las n variables de la función. Cada variable aparece una y sólo una vez, ya sea en su forma normal o complementada.

Ej.: $f(A, B, C)$

$$\left. \begin{array}{l} m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \\ m_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \\ m_6 = A \cdot B \cdot \overline{C} \end{array} \right\}$$

Cálculo de i : se sustituye cada variable por 1 si está en su forma natural, y por 0 si está en su forma complementada.

- Primera forma canónica de una función:

- Expresión algebraica de la misma en forma de suma de minterms.
- Es única para cada función.

$$\text{Ej: } f(A, B, C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C = m_3 + m_4 + m_1$$

- Teorema de transformabilidad: toda función lógica puede transformarse en primera forma canónica, y dicha transformación es única.

Algoritmo 1: *OBTENCIÓN DE LA PRIMERA FORMA CANÓNICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE OTRA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.*

1. Reducir la expresión original a una suma de productos elementales.
2. Si en un término falta la variable X_i , introducir en él la suma $X_i + X_i'$ y aplicar la propiedad distributiva.
3. Repetir el paso anterior para todos los términos y variables hasta que todos los términos de la función sean minterms.
4. Aplicar la ley de idempotencia para eliminar minterms repetidos.

SEGUNDA FORMA CANÓNICA (2FC)

Maxterm (M_i):

Dada una función lógica $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un maxterm es un término de la misma constituido por la suma de las n variables de la función. Cada variable aparece una y sólo una vez, ya sea en su forma normal o complementada.

Ej.: $f(A, B, C)$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \\ M_2 &= \overline{A} + B + \overline{C} \\ M_5 &= A + \overline{B} + C \end{aligned} \right\}$$

Cálculo de i : se sustituye cada variable por 1 si está en su forma natural, y por 0 si está en su forma complementada.

- Segunda forma canónica de una función:

- Expresión algebraica de la misma en forma de producto de maxterms.
- Es única para cada función.

$$\text{Ej.: } f(A, B, C) = (\overline{A} + B + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) = M_3 \cdot M_4 \cdot M_1$$

- Teorema de transformabilidad: toda función lógica puede transformarse en segunda forma canónica, y dicha transformación es única.

Algoritmo 2: OBTENCIÓN DE LA SEGUNDA FORMA CANÓNICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE OTRA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.

1. Reducir la expresión original a un producto de sumas elementales.
2. Si en un término falta la variable X_i , introducir en él el producto $X_i \cdot \overline{X_i}$ y aplicar la propiedad distributiva.
3. Repetir el paso anterior para todos los términos y variables hasta que todos los términos de la función sean maxterms.
4. Aplicar la ley de idempotencia para eliminar maxterms repetidos.

RELACIÓN ENTRE MINTERMS Y MAXTERMS

$$\text{- Ej.: } m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}; \quad \overline{m_0} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} = A + B + C = M_7$$

- La relación existente entre minterms y maxterms es:

$$\begin{aligned} \overline{m_i} &= M_{2^n-1-i} \\ \overline{M_i} &= m_{2^n-1-i} \end{aligned}$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS - TABLAS DE VERDAD

- Tabla de verdad:

- 1 columna por variable (n columnas).
- 1 fila por cada combinación posible de variables (total: 2^n filas).
- 1 columna adicional para registrar el valor de la función según cada combinación de variables.

- Total: $(n+1)$ columnas x 2^n filas

- La tabla de verdad de una función es única.

Ej:

i	A	B	C	f(i)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

OBTENCIÓN DE LA TABLA DE VERDAD DE UNA FUNCIÓN DESDE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

- Cálculo a partir de las tablas de verdad de las operaciones (funciones) elementales.

- Se introducen columnas adicionales para cálculos intermedios.

- Ej: $f(A, B, C) = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B + \overline{C} \cdot (A + B)$

i	A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	$\overline{A} \cdot B$	$A+B$	$\overline{C} \cdot (A + B)$	f(i)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	1	1	0	1
4	1	0	0	0	0	1	1	1
5	1	0	1	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	1	0	1

- Ej: $f(A, B, C) = B + A \cdot \overline{C}$

i	A	B	C	$A \cdot \overline{C}$	f(i)
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	0	1

OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU TABLA DE VERDAD: PRIMERA FORMA CANÓNICA

- La fila i está asociada al minterm i :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f(i) \cdot m_i$$

Ej:

i	A	B	C	f(i)	m _i
0	0	0	0	0	m ₀
1	0	0	1	0	m ₁
2	0	1	0	1	m ₂
3	0	1	1	1	m ₃
4	1	0	0	1	m ₄
5	1	0	1	0	m ₅
6	1	1	0	1	m ₆
7	1	1	1	1	m ₇

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= 0 \cdot m_0 + 0 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 + 1 \cdot m_3 + 1 \cdot m_4 + 0 \cdot m_5 + 1 \cdot m_6 + 1 \cdot m_7 = \\ &= m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C \end{aligned}$$

Algoritmo 3: OBTENCIÓN DE LA PRIMERA FORMA CANÓNICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA TABLA DE VERDAD.

La primera forma canónica se compone de la suma de los minterms asociados a las filas para las que la función vale 1.

El recíproco también se cumple.

$$EA (1FC) \Leftrightarrow TV$$

$$m_i \in 1FC \Leftrightarrow f(i) = 1$$

$$m_i \notin 1FC \Leftrightarrow f(i) = 0$$

OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU TABLA DE VERDAD: SEGUNDA FORMA CANÓNICA

- La fila i está asociada al maxterm 2^n-1-i :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\overline{f(i)} + M_{2^n-1-i})$$

Ej:

i	A	B	C	f(i)	$\overline{f(i)}$	$\overline{m_i} = M_{2^n-1-i}$
0	0	0	0	0	1	M_7
1	0	0	1	0	1	M_6
2	0	1	0	1	0	M_5
3	0	1	1	1	0	M_4
4	1	0	0	1	0	M_3
5	1	0	1	0	1	M_2
6	1	1	0	1	0	M_1
7	1	1	1	1	0	M_0

$$f(A, B, C) = (M_7 + 0) \cdot (M_6 + 0) \cdot (M_5 + 1) \cdot (M_4 + 1) \cdot (M_3 + 1) \cdot (M_2 + 0) \cdot (M_1 + 1) \cdot (M_0 + 1) = M_7 \cdot M_6 \cdot M_2$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \overline{f(A, B, C)} &= m_0 + m_1 + m_5 \\ \overline{\overline{f(A, B, C)}} &= \overline{m_0 + m_1 + m_5} = \text{(aplicando De Morgan)} \\ &= \overline{m_0} \cdot \overline{m_1} \cdot \overline{m_5} = \\ &= M_7 \cdot M_6 \cdot M_2 = f(A, B, C) \end{aligned}$$

Algoritmo 4: OBTENCIÓN DE LA SEGUNDA FORMA CANÓNICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA TABLA DE VERDAD.

La segunda forma canónica se compone del producto de los maxterms asociados a las filas para las que la función vale 0.

El recíproco también se cumple.

$$EA(2FC) \Leftrightarrow TV$$

$$M_i \in 2FC \Leftrightarrow f(2^n - 1 - i) = 0$$

$$M_i \notin 2FC \Leftrightarrow f(2^n - 1 - i) = 1$$

Algoritmo 5: *OBTENCIÓN DE LA SEGUNDA FORMA CANÓNICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA PRIMERA FORMA CANÓNICA.*

$$EA(1FC) \Rightarrow EA(2FC)$$

$$m_i \in 1FC \rightarrow M_{2^n - 1 - i} \notin 2FC$$

$$m_i \notin 1FC \rightarrow M_{2^n - 1 - i} \in 2FC$$

Algoritmo 6: *OBTENCIÓN DE LA PRIMERA FORMA CANÓNICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA SEGUNDA FORMA CANÓNICA.*

$$EA(2FC) \Rightarrow EA(1FC)$$

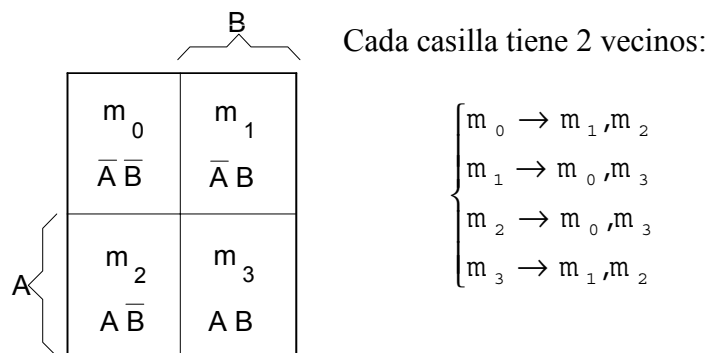
$$M_i \in 2FC \rightarrow m_{2^n - 1 - i} \notin 1FC$$

$$M_i \notin 2FC \rightarrow m_{2^n - 1 - i} \in 1FC$$

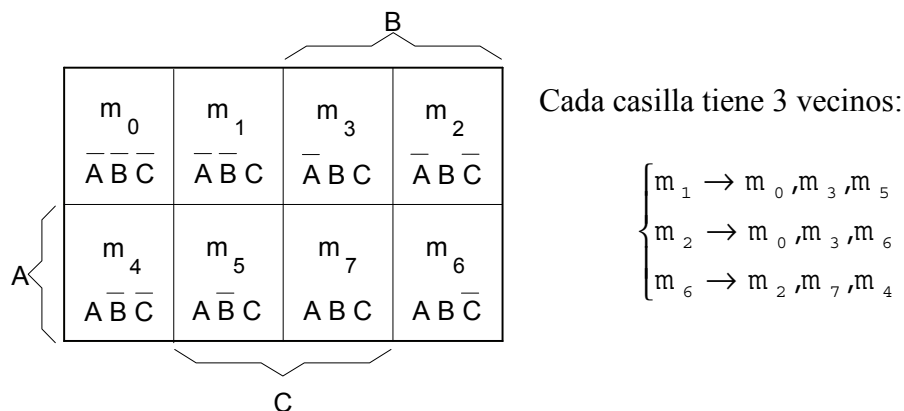
REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS - MAPAS DE KARNAUGH

- Mapa de Karnaugh de una función de n variables: tabla de 2^n casillas, cada una de ellas asociada a un minterm (o maxterm) de forma que al pasar de una casilla a otra adyacente horizontal o verticalmente sólo cambia el estado de una variable.

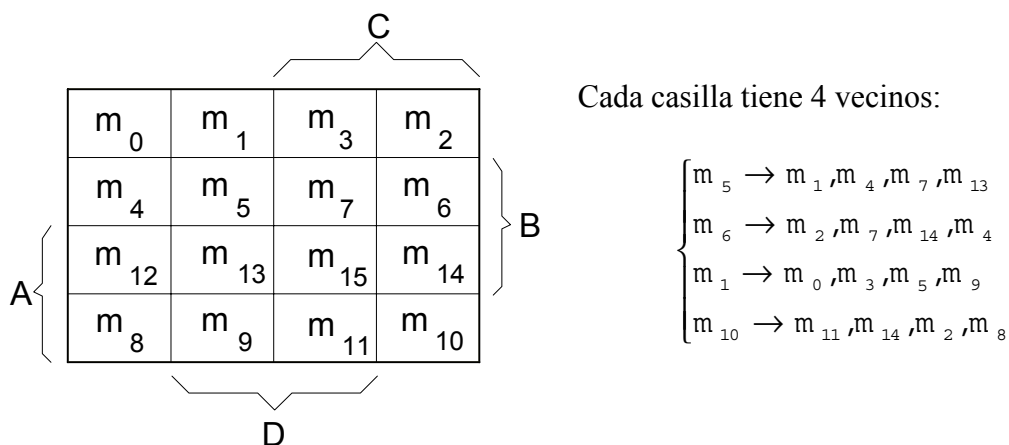
- Mapa de dos variables:



- Mapa de tres variables:



- Mapa de cuatro variables:



- Los mapas de Karnaugh obtenidos a partir de los minterms (1FC) son distintos de los obtenidos a partir de los maxterms (2FC).

Algoritmo 7: OBTENCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH (1FC) A PARTIR DE LA PRIMERA FORMA CANÓNICA.

$$EA (1FC) \Leftrightarrow M K (1FC)$$

$$m_i \in 1FC \Leftrightarrow c_i = 1$$

$$m_i \notin 1FC \Leftrightarrow c_i = 0$$

Algoritmo 8: OBTENCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH (2FC) A PARTIR DE LA SEGUNDA FORMA CANÓNICA.

$$EA (2FC) \Leftrightarrow M K (2FC)$$

$$M_i \in 2FC \Leftrightarrow c_i = 1$$

$$M_i \notin 2FC \Leftrightarrow c_i = 0$$

Algoritmo 9: OBTENCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH (1FC) A PARTIR DE LA TABLA DE VERDAD.

$$TV \Leftrightarrow M K (1FC)$$

$$f(i) = c_i$$

Algoritmo 10: OBTENCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH (2FC) A PARTIR DE LA TABLA DE VERDAD.

$$TV \Leftrightarrow M K (2FC)$$

$$f(i) = \overline{c_{2^n - 1 - i}}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

- Justificación:

- Se puede construir circuitos lógicos que implementen funciones lógicas.
- Las expresiones algebraicas de las funciones lógicas no son únicas.
- Mientras más sencilla sea la expresión algebraica de la función lógica, más rápido y más barato será el circuito que la implementa.

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS A PARTIR DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- Se realiza aplicando los teoremas del álgebra de Boole.

- Ej:

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B + \overline{C} \cdot (A + B) = \\ &= A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} = \\ &= B \cdot (A \cdot C + \overline{A} + \overline{C}) + A \cdot \overline{C} = \\ &= B \cdot [(A + \overline{A}) \cdot (\overline{A} + C) + \overline{C}] + A \cdot \overline{C} = \\ &= B \cdot [\overline{A} + C + \overline{C}] + A \cdot \overline{C} = B + A \cdot \overline{C} \end{aligned}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS A PARTIR DE MAPAS DE KARNAUGH

- Asociaciones:

- Se efectúan entre casillas adyacentes.
- Desaparecen las variables que cambian.

- Dos elementos contiguos: desaparece una variable.

Ej: MK 3 variables

$$m_4 + m_6 = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot \bar{C} \cdot (\bar{B} + B) = A \cdot \bar{C}$$

- Cuatro elementos contiguos: desaparecen dos variables.

Ej: MK 3 variables

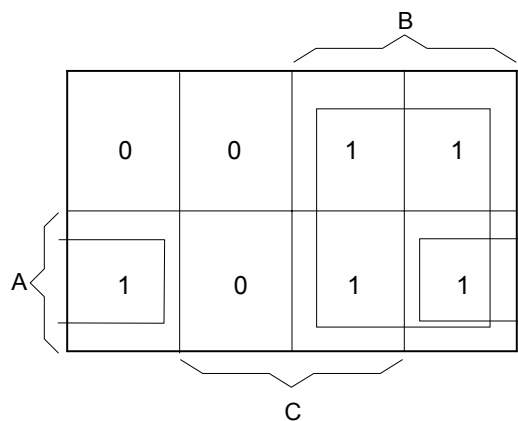
$$\begin{aligned} m_3 + m_2 + m_7 + m_6 &= \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} = \\ &= B \cdot (\bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot C + A \cdot \bar{C}) = B \end{aligned}$$

- Ocho elementos contiguos: desaparecen tres variables.

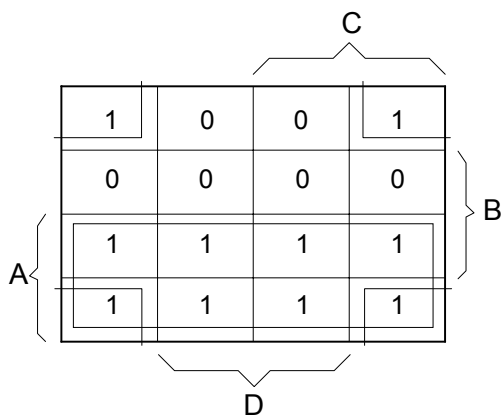
Ej: MK 4 variables

$$\begin{aligned} m_{12} + m_{13} + m_{15} + m_{14} + m_8 + m_9 + m_{11} + m_{10} &= \\ &= A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \\ &+ A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} = \\ &= A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{B} \cdot C \cdot D + \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \\ &+ B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + B \cdot \bar{C} \cdot D + B \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot \bar{D}) = A \end{aligned}$$

- Ej:



$$f(A,B,C) = B + A \cdot \bar{C}$$



$$f(A,B,C,D) = A + \bar{B} \cdot \bar{D}$$

- Redundancias:

- Concepto ingenieril, no matemático.
- Combinaciones imposibles de variables.
- Se pueden considerar como 0 ó 1, según convenga.
- Se representan con X en la tabla de verdad o el mapa de Karnaugh.

- Recomendaciones

- Tomar el mínimo número de grupos (mínimo número de términos).
- Tomar grupos lo más grandes posible (menor número de variables).

ORDEN DE UN CIRCUITO LÓGICO

- Número máximo de puertas que una variable lógica debe atravesar a lo largo del circuito.

SÍNTESIS DE CIRCUITOS

1. Simplificar la función por Karnaugh.
2. Elegir la función de menor orden.
3. Elegir el circuito con menor número de diodos y transistores.

RESUMEN

