# Guía 7, Álgebra y Geometría

Programa de Bachillerato, Universidad de Chile

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x, y) = (2x, x - y)$, $g(x, y) = (x, 2y - x)$.

   a) Determine si $f + g$ es inyectiva.

   b) Calcule $dim(ker(g \circ f))$.

2. Si $A$ es una matriz $n \times n$, muestre que $r(A) < n$ ssi existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq 0$ y $Ax = 0$.

3. Sea $A$ una matriz $m \times n$. Suponga que para todo $y \in \mathbb{R}^m$ existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = y$. Pruebe que $r(A) = m$.

4. Sea $A$ una matriz $5 \times 7$ cuyo rango es 5. Muestre que el sistema lineal $Ax = b$ tiene al menos una solución para todo $b \in \mathbb{R}^5$.

5. Pruebe que para toda matriz $r(A) = r(A^t)$.

6. Demuestre que si $A$ es una matriz $n \times n$ entonces $A$ es invertible ssi $dim_K(ker(A)) = 0$.

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Describa geométricamente la imagen de $A$ (Im(A)) y el espacio nulo de $A$ (ker(A)). Hallar las dimensiones de estos espacios.

   b) Describa geométricamente la imagen de $A^t$ y el espacio nulo de $A^t$ (ker(A)).

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Determine si $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in ker(A)$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in Im(A)$.

b) Encuentre la preimagen del vector $(2\,4\,-2\,k)^t$ indicando el valor adecuado para $k$.

c) Diga cuántos parámetros tiene en su solución el sistema $A^t x = b$ para un vector $b$ adecuado y $x \in \mathbb{R}^4$.

9. Resuelva los siguientes sistemas según sean los valores de $a$ y $b$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= a \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - ax_2 + bx_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + ax_3 &= a \\ (a-2)x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ (a-1)x_2 &= 1 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

10. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Encontrar en cada caso una base de $V/W$.

a) $W = \mathbb{R}^3$.

b) $W = \{(0,0,0)\}$.

c) $W = [(0,1,0)]$.

d) $W = [(1,0,0),(0,1,0)]$.

e) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + z = 0\}$.

11. Sea $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x,y,y,x+y)/x,y \in \mathbb{R}\}$

a) Calcule $dim_{\mathbb{R}} V$.

b) Encuentre una base de $V$ que contenga una base de $S$.

c) Encuentre una base de $V/S$.
Sea $T = \{(0, x, y, 0)/x, y \in \mathcal{R}\}$ otro subespacio de $V$

d) Encuentre una base de $S \cap T$ y una base de $S + T$.

e) encuentre una base de $(S + T)/S$ y una base de $T/(S \cap T)$.

12. Sea $X$ un conjunto no vacío y $a \in X$ fijo. Consideremos el espacio $V$ de las funciones $f : X \to K$ donde $K$ es cuerpo. Sea $W = \{f \in V/f(a) = 0\}$.

    i) Demostrar que $W$ es un subespacio de $V$.

    ii) Demostrar que $V/W \cong K$.

13. Sea $V$ espacio vectorial sobre $K$. Sea $S$ un subespacio de $V$ y sea $H$ el suplementario de $S$ en $V$. Probar que $V/H \cong S$.

14. Considere $\mathcal{R}[x]$ y sea $W = \{p(x) \in \mathcal{R}[x]/p(x) = (x^2 + 1)q(x), q(x) \in \mathcal{R}[x]\}$. A qué es isomorfo $\mathcal{R}[x]\}/W$? Es cierto que $\mathcal{R}[x]\}/W$ es isomorfo a $\mathcal{R}[x]\}/U$? Donde $U = \{p(x) \in \mathcal{R}[x]/p(x) = (x^2 + x + 1)q(x), q(x) \in \mathcal{R}[x]\}$.