Guía 5, Álgebra y Geometría

Programa de Bachillerato, Universidad de Chile

Otoño, 2011

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea W_1 un subespacio de V. Demostrar que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

2. Probar que si $W = \bigoplus_{i=1}^{3} W_i$ entonces $W_i \cap W_j = \{0\}$ para $i \neq j$, pero no es cierto el recíproco.

3. Es $\mathbb{R}^3$ suma directa de $V_1 = [(1,1,1)]$, $V_2 = [(1,0,1)]$ y $V_3 = [(1,2,3)]$?

4. Sea V espacio vectorial y sea $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un conjunto finito de vectores de V. Demostrar que:

   i) $[e_1, \ldots, e_n] = [e_1] + \ldots + [e_n]$.

   ii) El conjunto de vectores no nulos S es linealmente independiente ssi los subespacios que generan sus n vectores tienen suma directa, es decir, $[e_1, \ldots, e_n] = [e_1] \oplus [e_2] \oplus \ldots \oplus [e_n]$.

5. Sea V espacio vectorial sobre K. Si W_1, W_2 son subespacios de V tal que $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = 0$. Entonces para cualquier $v \in V$ existen únicos $w_i \in W_i$ tal que $v = w_1 + w_2$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Demuestre que:

   i) Si W_1, W_2 son subespacios suplementarios de V y B_1, B_2 son las bases respectivas de estos subespacios, entonces $B = B_1 \cup B_2$ es una base de V.

   ii) Si W_1 y W_2 son subespacios suplementarios de V, entonces
   $$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(V).$$

   iii) Sea $B = \{e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n\}$ base de V. Sean W_i los subespacios generados por B_i (i=1,2), donde $B_1 = \{e_1, \ldots, e_s\}$ y $B_2 = \{e_{s+1}, \ldots, e_n\}$. Entonces, W_1 y W_2 son subespacios suplementarios de V.

7. Sean V_i con $i = 1, \ldots, n$ espacios vectoriales. Sea $W = \oplus_{i=1}^{n} V_i$. Demostrar que $\dim(W) = \sum_{i=1}^{n} \dim(V_i)$.

8. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subespacios de un espacio V de dimensión finita. Demuestre que $\oplus_{i=1}^{n} U_i$ ssi para todo j, $2 \leq j \leq n$ se tiene que $U_j \cap \sum_{i=1}^{j-1} U_i = \{0\}$.

9. Sea $V = \mathbb{R}[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales en la indeterminada x. Sean U_1 y U_2 subespacios de V definidos por

$$\begin{aligned} U_1 &= \{p(x) \in V : p(1) = p(-1) = 0\} = \{c(x)(x^2-1) : c(x) \in V\} \\ U_2 &= \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Pruebe que $V = U_1 \oplus U_2$.

10. Consideremos el espacio vectorial V de las funciones de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$. Sea

$$W_1 = \{f \in V : f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

el conjunto de las funciones pares y

$$W_2 = \{f \in V : f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

el conjunto de las funciones impares.

   i) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V.
   ii) Demostrar que $V = W_1 \oplus W_2$.

11. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales, sobre el mismo cuerpo K. Probar que:

   a) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$, $\forall v_i \in V, \forall \alpha_i$. En particular, $f(0) = 0$ y $f(-v) = -f(v)$ para cualquier $v \in V$.
   b) Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es un conjunto linealmente dependiente de vectores de V, entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\}$ es un conjunto linealmente dependiente de W.
   c) Si, además de que $f : V \to W$ es lineal, también se sabe que $g : W \to U$ es aplicación lineal, entonces su composición $g \circ f : V \to U$ es, a su vez, una aplicación lineal.

12. Sean V, W espacios lineales sobre un cuerpo K y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Demostrar

   a) f es inyectiva ssi $ker(f) = \{0\}$.
   b) Si dimensión de v es finita, entonces f es inyectiva ssi $dim_K V = dim_K f(V)$.
   c) Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de V, entonces f es inyectiva ssi $f(B) = \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ es una base de $f(V)$, es decir, ssi $f(B)$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de W.

d) Si f es epiyectiva y V es de dimensión finita, entonces W es de dimensión finita.

13. Cuáles de las siguientes funciones T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales?

    a) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$
    b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$
    c) $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$
    d) $T(x_1, x_2) = (\sin x_1, x_2)$