

Guía 4, Álgebra y Geometría

Programa de Bachillerato, Universidad de Chile

1. Demostrar que los vectores $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$, $\alpha_3 = (0, -3, 2)$ forman una base para $\mathbb{R}^3$. Expresar cada uno de los vectores de la base canónica como combinación lineal de α_1 , α_2 y α_3
2. En el espacio vectorial V de los polinomios reales de grado menor o igual que n unión el polonomio cero, se considera la base usual $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Pruébese que $B' = \{1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n\}$, donde $a \in \mathbb{R}$ es dado, es una base de V .
3. Demostrar que $(1, 2 + i, 3)$, $(2 - i, i, 1)$ y $(i, 2 + 3i, 2)$ es una base de $\mathbb{C}^3$.
4. De una base de los siguientes espacios vectoriales V (o demuestre que no existe):
 - a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0, x - y - z = 0\}$
 - b) $V = [(2, -1, 3, 1), (-1, 3, 4, 0), (3, 1, 10, 0), (1, 1, 1, 2)]$
 - c) $V = \{\text{polinomios } p(x) \text{ con coeficientes reales de grado } \leq 3 \text{ y tales que } p(1) = p(0) = 0\}$
5. Considérese el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}$, de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 , y sea $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ el conjunto formado por las matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Probar que S es una base de V .
 - b) Hallar las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 en la base de S de una matriz genérica M de V : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
6. Considere en $\mathbb{R}^3$ los siguientes conjuntos:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + y = 0, 2y + z = 0\}$$

- a) Demostrar que W_1, W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$.
- b) Encontrar base para $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita. Sea W un subespacio de V , entonces, $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$. Además, $\dim_K(W) = \dim_K(V)$ ssi $W = V$.
8. En $\mathbb{R}^4$ tomemos los siguientes subespacios

$$S = [(1, -1, 2, -3), (1, 1, 2, 0), (3, -1, 6, -6)]$$

$$T = [(0, -2, 0, -3), (1, 0, 1, 0)]$$

Encontrar $\dim_{\mathbb{R}}(S)$, $\dim_{\mathbb{R}}(T)$ y $\dim_{\mathbb{R}}(S \cap T)$

9. Sean W_1, W_2 subespacios de dimensión finita dentro de un espacio vectorial V . Definamos

$$W_1 + W_2 = \{w \in V : w = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

- Demuestre que $W_1 + W_2$ es subespacio vectorial de V .
 - Demuestre que $\dim(W_1 + W_2) \leq \dim(W_1) + \dim(W_2)$.
 - Demuestre que $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$ ssi $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
10. Sean W_1, W_2 subespacios lineales de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K . Supongamos que W_1, W_2 son de dimensión finita. Demostrar que $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son de dimensión finita. Además

$$\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K(W_1) + \dim_K(W_2) - \dim_K(W_1 \cap W_2)$$

11. Sean V, W dos espacios vectoriales sobre K de dimensión finita. Calcular $\dim_K(V \times W)$.
12. Sea $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V de dimensión finita. Demostrar:
- Si S genera a V entonces $p \geq \dim(V)$.
 - Si S es un conjunto linealmente independiente, entonces $p \leq \dim(V)$.
 - Si S es linealmente independiente y $\dim(V)=p$, entonces S es base de V .
13. Encontrar una base de $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Hallar $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ y $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$.
14. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ y $v_3 = (1, 1, 0)$. Encuentre las coordenadas del vector (a, b, c) en la base $\mathcal{B}$.

15. Sea W el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $v_1 = (1, 0, i)$ y $v_2 = (1 + i, 1, -1)$.
- Demostrar que $B = \{v_1, v_2\}$ forman una base ordenada de W .
 - Demostrar que los vectores $w_1 = (1, 1, 0)$ y $w_2 = (1, i, 1 + i)$ pertenecen a W y forman otra base C de W .
 - Encontrar las coordenadas de v_1 y v_2 en la base ordenada $\{w_1, w_2\}$ de W .
 - Encontrar la matriz cambio de la base B a la base C y la matriz de cambio de la base C a la base B .
16. Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_2[x]$ de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2 unión el cero. Sea t un número real fijo y defínase $p_1(x) = 1, p_2(x) = x + t, p_3(x) = (x + t)^2$. Pruebe que $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base ordenada de $\mathbb{P}_2[x]$. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ encuentre las coordenadas del polinomio f en la base ordenada B .
17. Sea B_1 y $B_2 = \{(-1, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 2, -1)\}$ dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz cambio de la base B_1 a la base B_2 .

- Encontrar la base B_1 .
 - Para $v = (1, 0, 6)$ determine $[v]_{B_1}$ y $[v]_{B_2}$, las matrices de las coordenadas de v respecto de las bases ordenadas B_1 y B_2 , respectivamente.
18. Sea $B = \{(1, -1), (0, 2)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Si $v \in \mathbb{R}^2$ es tal que $[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, encuentre el vector v .
19. Sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Sea $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Demostrar que $e'_1 = e_1 + e_2$ y $e'_2 = e_1 - e_2$ forman una base ordenada de $\mathbb{R}$. Escriba el vector v como combinación lineal de los vectores e'_1 y e'_2 hallando las coordenadas de v respecto a esta nueva base.