Guía 3, Álgebra y Geometría

Programa de Bachillerato, Universidad de Chile

1. Sea V un espacio vectorial sobre K y considere $v \in V$ y $\alpha \in K$. Demuestre las siguientes propiedades en V

   a) $0_K \cdot v = 0_V$

   b) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$

   c) $\alpha \cdot v = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_K \wedge v = 0_V$

   d) $(-1) \cdot v = -v$

2. Sean $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-2,1,-1)$, $v_3 = (0,1,1)$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

   a) Es $(3,2,5)$ combinación lineal de v_1, v_2, v_3?

   b) Es $(1,1,0)$ combinación lineal de v_1, v_2, v_3?

   c) Es v_1 combinación lineal de v_2 y v_3?

3. Demuestre que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Encuentre un conjunto de generadores de S.

4. Sean v, w elementos de un espacio vectorial V. Demuestre que son linealmente dependientes ssi existe un escalar no nulo α tal que $v = \alpha w$ o $w = \alpha v$.

5. Sean (a,b) y (c,d) dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que estos vectores son linealmente independientes ssi $ad - bc \neq 0$.

6. Sea $W = \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ un subconjunto de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Pruebe que W es un subespacio de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Encuentre un conjunto generador de W.

7. Sean v_1, v_2, v_3 vectores de un espacio vectorial tal que v_1, v_2 son l.i. Pruebe que si v_3 no pertenece a $[v_1, v_2]$, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto l.i.

8. Pertenece el vector $(3,-1,0,-1)$ al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(2,-1,3,2), (-1,1,1,-3)$ y $(1,1,9,-5)$?

9. Determine si el conjunto $S = \{1-x, 3-x^2\}$ genera $\mathbb{P}_2[x]$. Si no fuera así, encuentre un conjunto generador de $\mathbb{P}_2[x]$ que contenga a S.

10. Hallar el valor de k para que los vectores $(2,-3,1), (-4,6,-2)$ y $(k,1,2)$ sean linealmente dependientes.

11. Demuestre que el espacio de los polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$ no es finitamente generado.

12. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes. Si no lo son, de una relación no trivial de dependencia lineal.

    a) $\{(1,-2,1),(2,1,-1),(7,-4,1)\}$
    b) $\{x^2+x, x^2+2x-1, x^2, 3x\}$
    c) $\{\sin(x)\cos(x), \sin(2x)\}$
    d) $\{1, t, e^{-t}\}$