Tercera Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2011

1. Supongamos que se tiene un conjunto de 26 elementos y escoges al azar un subconjunto de él. ¿Es más fácil que ese subconjunto tenga 10 elementos o 15 elementos?

2. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los números $0, 1, 2, 3$ y 4?. ¿Cuántos de ellos son pares y cuántos de ellos son impares?.

3. Si lanzas tres dados, ¿de cuántas formas distintas pueden sumar 11?.

4. En un curso de 62 alumnos, ¿de cuántas formas distintas pueden celebrar cumpleaños en fechas distintas?.

5. Considere el proceso de lanzar un dado. Suponga que obtuvo el número n que esta entre 1 y 6, luego lance una moneda n veces.

   a) Para n lanzamientos, cuente todas las posibles opciones de obtener cara o sello.

   b) Para n lanzamientos, ¿cuantas opciones solo tienen 1 cara?. ¿Cuantas opciones tienen al menos 2 caras?

   c) Para n lanzamientos, ¿cuantas opciones solo tienen 2 caras?.

   d) Para n lanzamientos, ¿cuantas opciones solo tienen k caras.

   e) Considerando el proceso completo, ¿de cuantas maneras se pueden obtener k caras?.

6. Considere cinco cursos paralelos de matemáticas y sus respectivos cinco profesores (un profesor solo hace clases a uno de los cursos). Para la primera prueba del curso cada profesor le tomará la prueba a un curso

distinto del propio. ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir los profesores en los cursos?.

7. Se tiene un cubo de madera de 4 centímetros de arista, se pintan de azul todas las caras y luego se corta formando 64 cubitos de 1 centímetro de arista cada uno. ¿Cuántos de ellos no tienen ninguna cara pintada?. ¿Cuántos de ellos tienen una cara pintada?. ¿Cuanto de Ellos tienen dos caras pintadas?. ¿Cuántos de ellos tienen tres caras pintadas?. ¿Cuántos de ellos tienen cuatro caras pintadas?.

8. En el poker, ¿es más fácil obtener un Full o Color?.

9. ¿Es más fácil ganar en el Loto o en el Kino?.

10. En la PSU de Matemáticas, hay 70 preguntas cada una de ellas con 5 alternativas. ¿Cuántos estudiantes se necesitarían para cubrir las posibles formas de responder a la prueba?.

11. En un juego de naipes de 52 cartas, se reparten todas las cartas a cuatro jugadores que forman 2 parejas, gana la pareja que tiene todos los corazones. ¿Es más fácil perder o ganar?.

12. Un domador de fieras tiene 4 tigres y 5 leonas, los debe hacer ingresar a la arena en fila, pero jamás debe poner a un tigre detrás de otro. ¿De cuántas formas puede hacerlo?.

13. Se lanzan 2 dados, ganas si los valores que aparecen suman 7 y pierdes si suman 11, 12 o 2. ¿Es más fácil perder o ganar?.

14. Un artesano hace collares con tres piedras de esmeralda y tres piedras de rubí, dispuestas a la misma distancia una de la otra. Decide regalar a sus amigas un collar. ¿Cuántos collares podrá regalar sin correr el riesgo de que dos amigas se encuentren con el mismo collar puesto en el cuello?

15. Dos jugadores de Ping-Pong, Álvaro y Beatriz, se enfrentan en un partido, gana aquelque completa 11 puntos (se permite ganar $11 - 10$). El

partido va $9-8$ a favor de Beatriz. ¿De cuántas formas puede continuar el partido, hasta que uno gane?. ¿Cuántas de esas maneras favorecen a Álvaro?.

16. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. En caso de ser verdaderas demuestre.

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, para cualquier $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$.

(b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

(c) La suma de los términos de la n-esima fila del triángulo de Pascal es 2^n.

(d) Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

(e) En el desarrollo de $(3x^2 - x^{-1})^6$ no hay términos independientes de x.

(f) En cualquier fila del Triángulo de Pascal si se suma los elementos alternando el signo, resulta cero.

(g) El desarrollo del Binomio de Newton $(a+b)^n$ tiene n sumandos.

(h) Si $\binom{12}{x} = \binom{12}{3}$ entonces $x = 3$.

(i) $a_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$ es un número entero para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

(j) Para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} = 2 \cdot 3^n$$

(k) Si $p \in \mathbb{N}$ entonces

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$