Ejercicio Inducción

Demuestre usando inducción que el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n.

Para $n = 1$, es decir cuando el conjunto tenga un elemento, podemos considedar el conjunto $I_1 = \{1\}$ que tiene un elemento. Los subconjuntos de I_1 son

$$\emptyset, \{1\}$$

Luego como hay 2 subconjuntos se cumple la afirmación para $n = 1$.

Hipótesis Inductiva: El conjunto $I_n = \{1, 2, 3, .., n\}$ tiene 2^n subconjuntos.
Por demostrar: El conjunto $I_{n+1} = \{1, 2, 3, .., n, n+1\}$ tiene 2^{n+1} subconjuntos.

Consideremos A un subconjunto de I_{n+1}, $A \subset I_{n+1}$. Para A se tienen dos opciones:

1. $n + 1 \notin A$.
   En este caso se tiene que A es un subconjunto de I_n. Luego podemos concluir que el número de subconjuntos de I_{n+1} que cumplen esta condición son los subconjuntos de I_n, que por la **hipótesis inductiva** sabemos que en total son 2^n.

2. $n + 1 \in A$
   En este caso si consideramos el subconjunto A y le quitamos el elemento $n + 1$, $A - \{n + 1\}$, nos queda un subconjunto de I_n. Por la **hipótesis inductiva** sabemos que en total son 2^n subconjuntos de I_n, así por lo anterior si tomamos un subconjunto de I_n y le unimos el subconjunto $\{n + 1\}$ obtenemos un subconjunto de I_{n+1} que cumple la condición 2). Luego el total de subconjuntos que cumplen esta condición son 2^n

Por lo tanto el número de subconjuntos de I_{n+1} son: 2^n que cumplen la condición 1) mas 2^n que cumplen la condición 2), así

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

comentarios

Observe que antes de pensar en el argumento para un n arbitrario, usted puede pensarlo para $n = 1$.
Cuando consideramos un subconjunto A de $I_2 = \{1, 2\}$ tenemos dos opciones, el subconjunto contiene al elemento 2 o no.
En el caso que no lo contenga entonces el subconjunto A es un subconjunto de I_1 y las opciones son:

$$A = \emptyset \qquad o \qquad A = \{1\}$$

Ahora si el subconjunto A contiene al elemento 2, al considerar el subconjunto $A - \{2\}$ este es un subconjunto de I_1 y así las opciones son :

$$A - \{2\} = \emptyset \qquad o \qquad A - \{2\} = \{1\}$$

Luego

$$A = \{2\} \qquad o \qquad A = \{1, 2\}$$

Con esto concluimos que en total los subconjuntos de I_2 son los subconjuntos de I_1 mas los subconjutos de I_1 unidos con el subconjunto $\{2\}$.