# Pauta Prueba Parcial 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 16 de Abril, 2011

**Tiempo :** 120 **minutos .**

**Nombre:**

1. Elija uno de los siguientes dos problemas y resuelvalo.

   (a) Demuestre usando Inducción que si $x < 0$ entonces
   $$(1-x)^n \geq 1 - nx$$
   para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Solución:

   Para demostrar por indución primero comprobamos el caso $n = 1$. Para $n = 1$ se tiene que
   $$(1-x)^n = (1-x)^1 = 1 - x$$
   y además
   $$1 - nx = 1 - 1 \cdot x = 1 - x$$
   Así en este caso en particular se tiene la igualdad, luego se cumple la desigualdad en el caso $n = 1$.

   **Hip. Inductiva**: Para $x < 0$ la desigualdad
   $$(1-x)^n \geq 1 - nx$$
   se cumple para $n$.

   **Tesis:** Demostrar que la desigualdad sigue siendo valida para $n+1$, es decir demostrar
   $$(1-x)^{(n+1)} \geq 1 - (n+1)x$$
   En efecto, notamos que
   $$\begin{aligned} (1-x)^{(n+1)} &= (1-x)^n(1-x) \\ &= (1-x)^n - x(1-x) \\ &\geq 1 - nx - x + x^2 \qquad ||Por\ hipotesis\ inductiva \\ &\geq 1 - nx - x \qquad ||x^2\, siempre\, es\ un\, numero\, positivo \\ &= 1 - (n+1)x \end{aligned}$$

(b) Demuestre usando el Teorema del Binomio que si $x < 0$ entonces

$$(1-x)^n \geq 1 - nx$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned}
(1-x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (1)^{n-k}(-x)^k \qquad ||Por\, el\, Teorema\, del\, Binomio \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^k x^k \\
&= \left( \begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) x^0 - \left( \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) x + \left( \begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) x^2 - \left( \begin{array}{c} n \\ 3 \end{array} \right) x^3 + \cdots (-1)^n \left( \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) x^n \\
&= 1 - nx + \left( \begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) x^2 - \left( \begin{array}{c} n \\ 3 \end{array} \right) x^3 + \cdots (-1)^n \left( \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) x^n
\end{aligned}$$

Como $x < 0$ se tiene que $x^k$ para $k$ un número impar también es un número negativo. De esta forma todos los términos dados por k impar, al estar multiplicados por $(-1)^k = -1$ son positivos, es decir

$$(-1)^k \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k = - \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k > 0$$

En el caso que $k$ sea un número par $x^k$ es siempre positivo, así:

$$(-1)^k \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k > 0$$

De esta forma

$$(1-x)^n = 1-nx+\left( \begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) x^2 - \left( \begin{array}{c} n \\ 3 \end{array} \right) x^3 + \cdots (-1)^n \left( \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) x^n \geq 1-nx$$

2. Una persona desea recorrer un camino recto de 100 metros. Suponga que durante la primera hora la persona avanza la mitad del camino total, es decir 50 metros, y durante cada hora que pasa avanza sólo la mitad de lo que ha avanzado en el paso anterior.

(a) ¿Cuántos metros recorre en la hora $k$-ésima?. Demuestre su conjetura.

Solución:

LLamaremos $a_k$ a la cantidad de metros que recorre la persona en la $k$-ésima hora. Según el enunciado tenemos

$$a_1 = 50$$

Del hecho que durante cada hora que pasa avanza sólo la mitad de lo avanzado en el paso anterior esto nos dice que en la hora $k$, como lo avanzado en el paso anterior es $a_{k-1}$, se obtiene

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{2}$$

Ahora cuando

$$\begin{array}{lcccl} k=2 & , & a_2 & = & \frac{a_1}{2} = \frac{50}{2} \\ k=3 & , & a_3 & = & \frac{a_2}{2} = \frac{50}{2^2} \\ k=4 & , & a_4 & = & \frac{a_3}{2} = \frac{50}{2^3} \end{array}$$

Según el proceso anterior la conjetura es

$$a_k = \frac{50}{2^{k-1}}$$

Ahora demostraremos nuestra conjetura. El paso $n = 1$ es claro a partir de nuestros calculos anteriores.
**Hipótesis Inductiva:** $a_k = \frac{50}{2^{k-1}}$.
**Por demostrar:** $a_{k+1} = \frac{50}{2^k}$.
En efecto, sabemos que en la hora $k+1$ avanza la mitad de lo avanzado en la hora $k$, luego

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2}$$

Ahora por la hipotesis inductiva como $a_k = \frac{50}{2^{k-1}}$, reemplazando en la igualdad anterior, se tiene:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} = \frac{\frac{50}{2^{k-1}}}{2} = \frac{50}{2^k}$$

Luego hemos demostrado nuestra conjetura.

(b) ¿Cuántos metros recorre desde el inicio del camino hasta la hora $n$-ésima?.

<u>Solución:</u>

Para calcular cuanto recorre desde el inicio del camino, debemos sumar $a_k$ con $k = 1, ..., n$. Así

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{50}{2^{k-1}} = 50 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 50 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 100 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

es la cantidad de metros que recorre desde el inicio del camino hasta la hora $n$-ésima.

3. Se dispone de pintura roja, blanca, azul, verde y amarilla para pintar seis postes ordenados en una cuadra. ¿De cuántas formas distintas se pueden pintar los postes si: se deben usar cuatro colores, tres postes deben ser de un mismo color y los restantes deben ser de distintos colores?.

   Solución:

   Primero eligamos cuál es el color que se repetirá. Esto se puede hacer de

$$\binom{5}{1}$$

   formas distintas.
   A continuación eligamos en cuál de los seis postes iran los tres del mismo color. Esto se puede hacer de

$$\binom{6}{3}$$

   formas distintas.
   Ahora como no se debe repetir ningun color en los restantes tres postes, nos quedan cuatro colores de donde elegir para pintarlos, o sea que debemos elegir tres entre cuatro colores. Esto se puede hacer de

$$\binom{4}{3}$$

   maneras distintas.
   Por último podemos de 3! formas distintas pintar los tres postes con los tres colores elegidos.
   Luego por principio multiplicativo, el número total de formas distintas de pintar los postes es

$$\binom{5}{1}\binom{6}{3}\binom{4}{3}3! = 2400$$

4. Elija uno de los siguientes dos problemas y resuelvalo.

(a) Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$|x-1| - 2 + |2x| - 3x < 5$$

<u>Solución:</u>

Primero notamos que

$$|x-1| - 2 + |2x| - 3x < 5 \Leftrightarrow |x-1| + |2x| - 3x < 7$$

Escribamos $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, 1) \cup [1, \infty)$ entonces se tiene que:

<u>Caso 1:</u> Si $x \in (-\infty, 0)$ entonnces se tiene que

$|x-1|+|2x|-3x < 7 \Leftrightarrow -(x-1)-2x-3x < 7 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, \infty)$

Por tanto $x \in (-\infty, 0) \cap (-1, \infty)$, es decir $x \in (-1, 0)$.

<u>Caso 2:</u> Si $x \in [0, 1)$ entonnces se tiene que

$|x-1|+|2x|-3x < 7 \Leftrightarrow -(x-1)+2x-3x < 7 \Leftrightarrow x > -3 \Leftrightarrow x \in (-3, \infty)$

Por tanto $x \in [0, 1) \cap (-3, \infty)$, es decir $x \in [0, 1)$.

<u>Caso 3:</u> Si $x \in [1, \infty)$ entonnces se tiene que

$$|x-1| + |2x| - 3x < 7 \Leftrightarrow x - 1 + 2x - 3x < 7 \Leftrightarrow -1 < 7$$

Por tanto $x \in [1, \infty) \cap \mathbb{R}$, es decir $x \in [1, \infty)$.

Luego todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$|x-1| - 2 + |2x| - 3x < 5$$

son los que están en el conjunto $(-1, 0) \cup [0, 1) \cup [1, \infty) = (-1, \infty)$.

(b) Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{x^2+2}{x^2-3x+2} > \frac{1-x}{x^2-3x+2}$$

<u>Solución:</u>

Primero notar que $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq 0$, es decir $x\neq 1$ y $x\neq 2$. Luego la inecuación la resolvemos en $\mathbb{R}-\{1,2\}$.
En efecto notamos que

$$\frac{x^2+2}{x^2-3x+2} > \frac{1-x}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x^2-3x+2} - \frac{(1-x)}{x^2-3x+2} > 0$$

es decir

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2} > 0$$

Como $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>\frac{3}{4}>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2} > 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$$

En efecto

$$\begin{aligned}
(x-1)(x-2)>0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1>0 \wedge x-2>0) \vee (x-1<0 \wedge x-2<0)\\
&\Leftrightarrow \quad (x>1 \wedge x>2) \vee (x<1 \wedge x<2)\\
&\Leftrightarrow \quad x>2 \vee x<1\\
&\Leftrightarrow \quad x\in(2,\infty) \vee x\in(-\infty,1)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{x^2+2}{x^2-3x+2} > \frac{1-x}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$$

5. Demuestre que si $a$ y $b$ son números reales positivos entonces

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

Solución:

Como $a$ y $b$ son números positivos, entonces $a + b > 0$. Además como $(a - b)^2 \geq 0$ entonces se tiene que

$$(a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

Pero notamos que $(a+b)(a-b)^2 = (a+b)(a-b)(a-b) = (a^2-b^2)(a-b)$ entonces

$$(a^2 - b^2)(a - b) \geq 0$$

Esto último equivale a decir que

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \geq 0$$

es decir

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$