3

Funciones y gráficas

Gottfried Wilhelm Leibniz

Si a un grupo de matemáticos, profesores y científicos se les preguntara cuál es el concepto matemático más importante, ciertamente el término *función* aparecería cerca o inclusive en la parte superior de la lista de sus respuestas. En los capítulos 3 y 4, nos centraremos principalmente en la definición e interpretación gráfica de una función.

La palabra "función" la introdujo probablemente el matemático alemán "coinventor del cálculo", Gottfried Wilhelm Leibniz, a finales del siglo XVII, y proviene de la palabra latina "functo", que significa acto de realizar. En los siglos XVII y XVIII, los matemáticos tenían solamente la noción más intuitiva de una función. Para muchos de ellos, una relación funcional entre dos variables estaba dada por cierta curva uniforme o por una ecuación que incluía las dos variables. A pesar de que las fórmulas y las ecuaciones juegan un papel importante en el estudio de las funciones, en la sección 3.4 veremos que la interpretación "moderna" de una función (que data de mediados del siglo XIX) es la de un tipo especial de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

3.1 Sistema de coordenadas cartesianas, relaciones y gráficas

Anteriormente vimos que cada número real puede asociarse exactamente con un punto en la recta numérica. Ahora examinemos una correspondencia entre puntos en el plano y pares ordenados de números reales.

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Un **sistema cartesiano o sistema rectangular o sistema de coordenadas*** se forma en un plano con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el punto que le corresponde al número 0 en cada recta. Este punto de intersección se llama **origen** y se denota con O. A menudo, las rectas numéricas horizontales y verticales se llaman el **eje x** y el **eje y**, respectivamente. Los ejes dividen el plano en cuatro regiones, llamadas **cuadrantes**, que se numeran como lo muestra la figura 1(a). Como vemos en la figura 1(b) las escalas en el eje x y en el eje y no necesariamente son iguales. Un plano que contenga el sistema de coordenadas rectangular se llama **plano cartesiano, plano de coordenadas o plano *xy***.

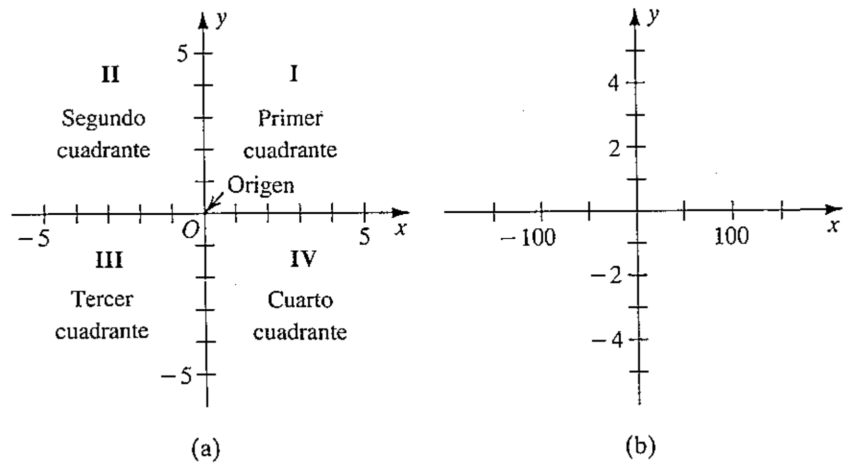


FIGURA 1

LA ABSCISA Y LA ORDENADA

Sea P un punto en el plano cartesiano. Asociamos un par ordenado de números reales con P, trazando una línea vertical desde P hasta el eje x, y una línea horizontal desde P hasta el eje y. Si la línea vertical interseca el eje x en a y la línea horizontal interseca el eje y en b, asociamos el par ordenado (a, b) con el punto P (véase figura 2). Y, viceversa, a cada par ordenado (a, b) de números reales le corresponde un punto P en el plano. Este punto se ubica en la intersección de la línea vertical y pasa a través de a en el eje x y la recta horizontal pasa

* Este sistema se llamó así en honor del filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650).

a través de b en el eje y. De aquí en adelante, nos referiremos a un par ordenado como un **punto** que denotaremos como $P(a, b)$ o, simplemente, (a, b)*. Llamamos a a la **abscisa**, o **coordenada x** de P, y a b la **ordenada**, o **coordenada y**, de P. (Véase figura 2).

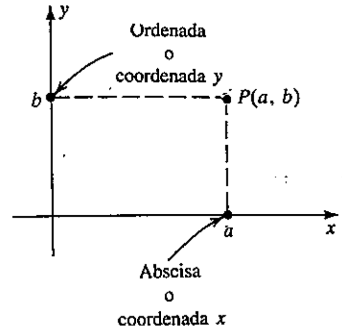


FIGURA 2

Los signos algebraicos de las coordenadas x y y de cualquier punto (x, y) en cada uno de los cuatro cuadrantes se indican en la figura 3. Se considera que los puntos que hay en cualquiera de los ejes no están en ninguno de los cuadrantes. Cuando localizamos un punto correspondiente a un par ordenado de números en un plano cartesiano y lo representamos utilizando un punto, decimos que **marcamos** el punto.

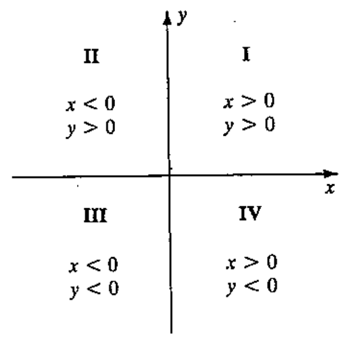


FIGURA 3

EJEMPLO 1

Marque los puntos $A(1, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(-\frac{3}{2}, -2)$, $D(0, 4)$ y $E(3.5, 0)$. Especifique en qué cuadrante se localiza cada punto.

Solución. Los 4 puntos se marcan en el plano cartesiano en la figura 4. El punto A está en el cuadrante I, el B en el II, y el C en el III. Los puntos D y E, que se localizan en los ejes y y x respectivamente, no están en ningún cuadrante.

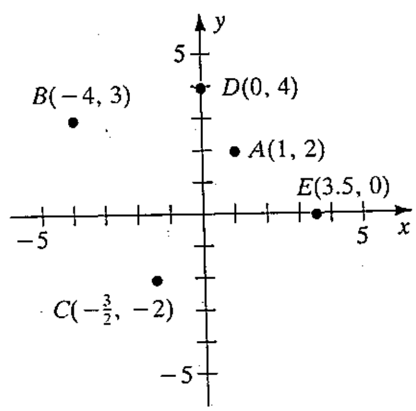


FIGURA 4

RELACIONES Y GRAFICAS

En general, a cualquier conjunto de pares ordenados de números reales se llama una **relación** y al correspondiente conjunto de puntos en el plano se llama **gráfica de la relación.**

EJEMPLO 2

Grafique la relación $S = \{(-1, 2), (0, 4), (3, -\frac{5}{2}), (-3, -1)\}$.

Solución. En la figura 5 hemos marcado los 4 puntos que corresponden a los pares ordenados de la relación S.

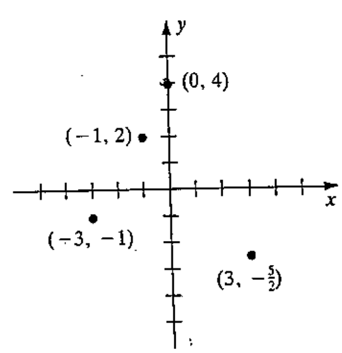


FIGURA 5

EJEMPLO 3

Grafique la relación $T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, |y| = 1\}$.

* Esta es la misma notación utilizada para designar un intervalo abierto. Debe estar claro considerando el contexto de la discusión si estamos considerando un punto (a, b) o un intervalo abierto (a, b).

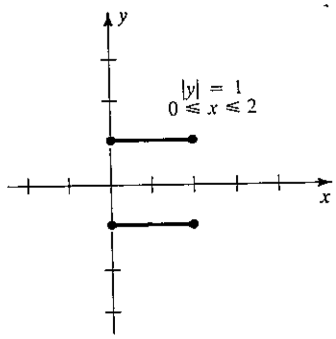


FIGURA 6

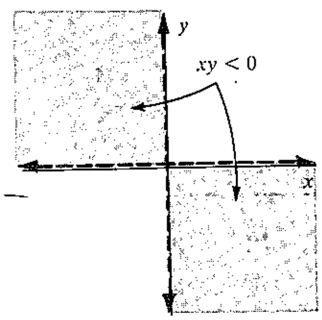


FIGURA 7

Solución. Primero, recuerde que $|y| = 1$ implica que $y = 1$ o $y = -1$. Así, para graficar la relación T, marcamos los puntos cuyas coordenadas x sean números del intervalo $[0, 2]$ y cuyas coordenadas y sean ó 1 ó -1. (Véase figura 6).

EJEMPLO 4

Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano que satisfaga cada una de las siguientes condiciones: **(a)** $xy < 0$ y **(b)** $|y| \geq 2$.

Solución

(a) El producto de dos números es negativo cuando uno de los números es positivo y el otro negativo. Así, $xy < 0$ cuando $x > 0$ y $y < 0$ o cuando $x < 0$ y $y > 0$. Vemos en la figura 3 que $xy < 0$ para todos los puntos (x, y) en los cuadrantes II y IV. Por tanto, podemos representar el conjunto de puntos (x, y) para los cuales $xy < 0$ por medio de las regiones sombreadas de la figura 7. Los ejes de coordenada se representan por medio de líneas interrumpidas para indicar que los puntos sobre estas líneas no se incluyen en la solución.

(b) En la sección 2.7 vimos que $|y| \geq 2$ puede expresarse como $y \leq -2$ o $y \geq 2$. Puesto que x no está restringido, los puntos (x, y) para los cuales $y \leq -2$ o $y \geq 2$ pueden representarse por medio de las regiones sombreadas de la figura 8. Utilizamos líneas continuas al borde de la región sombreada para indicar que estos puntos sí se incluyen en la solución.

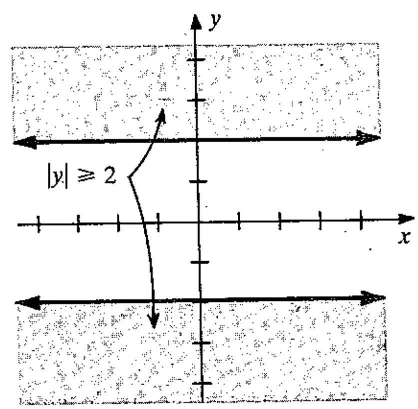


FIGURA 8

GRAFICA DE UNA ECUACION

En los dos ejemplos anteriores examinamos gráficas de relaciones definidas por desigualdades. Ahora consideramos relaciones definidas por una ecuación que relaciona dos variables x y y. Al conjunto de puntos en el plano que corresponde a los pares ordenados (x, y) en la relación se llama **gráfica de la ecuación.**

EJEMPLO 5

Grafique la ecuación $y = x^2$.

Solución. Ya que, en general, la gráfica de una ecuación consta de un número infinito de puntos, marcamos unos cuantos y los unimos por medio de una curva uniforme, como lo muestra la figura 9.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

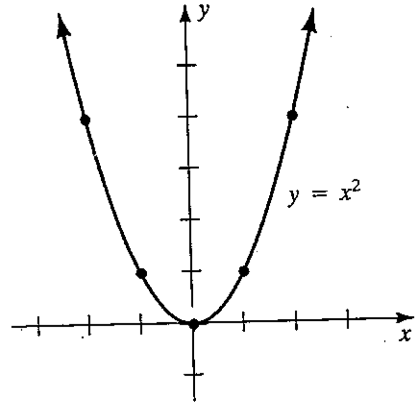


FIGURA 9

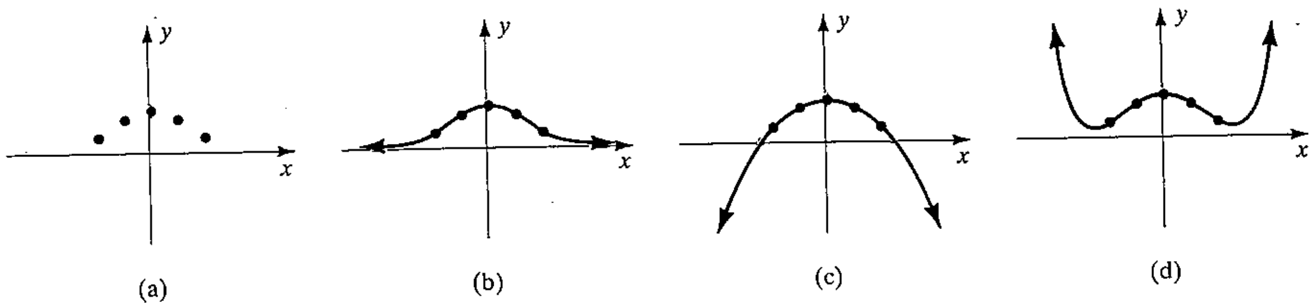


FIGURA 10

Cinco puntos unidos por medio de diferentes curvas uniformes.

Nota de advertencia: pueden surgir varios problemas con la técnica de la demarcación de puntos. Debe marcar los puntos que sean suficientes para poder discernir la forma de la gráfica. Pero, ¿qué significa "puntos suficientes"?, ¿seis?, ¿veinte? (Véase figura 10).

Por supuesto, la respuesta depende tanto de la ecuación que esté graficando como de su experiencia. A medida que adquiera experiencia en matemáticas, encontrará que a menudo hay formas de graficar una ecuación marcando el mínimo número de puntos. Además, no todas las gráficas son "curvas uniformes". (Véase figura 11).

Debido al puntiagudo pico del origen, la curva que une los puntos en la figura 11 (b) no se considera "suave". Por tanto, tenga cuidado cuando marque los puntos.

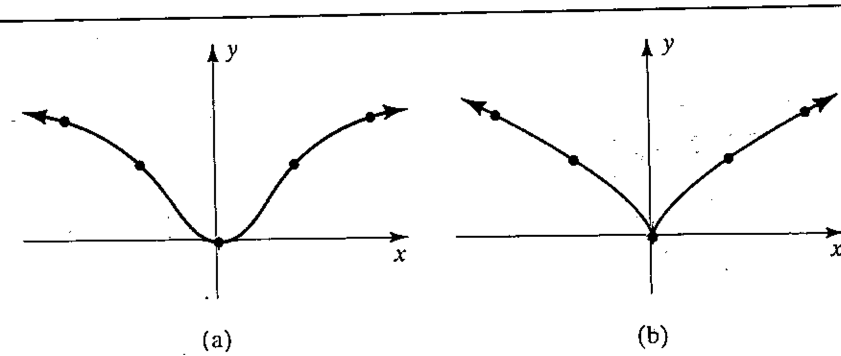


FIGURA 11

Cinco puntos unidos por medio de una curva (a) suave; (b) no suave.

EJEMPLO 6

Grafique la ecuación $y = \sqrt{x}$.

Solución. Para obtener valores reales para y, observamos que x no puede ser negativo. Marcamos los puntos correspondientes a los pares ordenados enumerados en la tabla correspondiente y, como en el ejemplo 5, los unimos por medio de una curva suave (véase figura 12).

x	
0	0
1	1
2	$\sqrt{2} \approx 1.41$
3	$\sqrt{3} \approx 1.73$
4	2

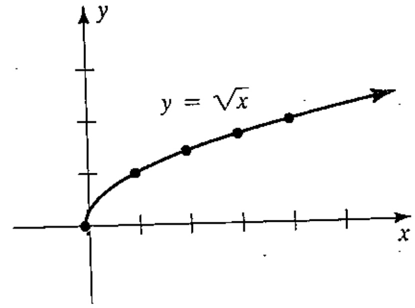


FIGURA 12

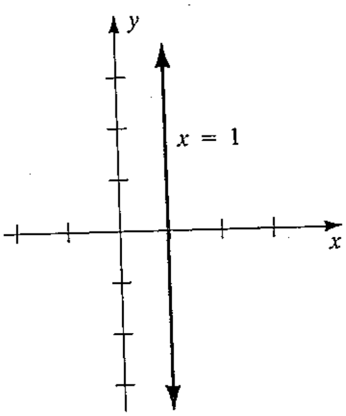


FIGURA 13

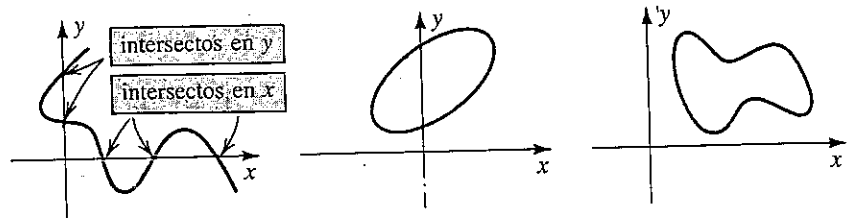
EJEMPLO 7

Grafique la ecuación $x = 1$.

Solución. La coordenada x de cada punto que satisfaga esta ecuación debe ser igual a 1. Puesto que y no aparece explícitamente en la ecuación, se entiende que la coordenada y de un punto que satisfaga la ecuación puede ser cualquier número real. Como lo vemos en la figura 13, la gráfica de $x = 1$ es una línea vertical a una unidad a la derecha del eje y.

INTERSECTOS

Localizar los puntos en los cuales la gráfica de una ecuación atraviesa los ejes coordenados puede ser útil para trazar su gráfica. Los **intersectos en x** de la gráfica de una ecuación son las coordenadas x de los puntos en los cuales la gráfica atraviesa el eje x. Ya que cada punto del eje x tiene una coordenada $y = 0$, los intersectos en x (si hay) pueden determinarse en la ecuación dada asignando $y = 0$ y despejando x. A su vez, los **intersectos en y** de la gráfica de una ecuación son las coordenadas y de los puntos en los cuales la gráfica atraviesa el eje y. Estos valores pueden encontrarse asignando $x = 0$ en la ecuación y despejando y. (Véase figura 14).



(a)

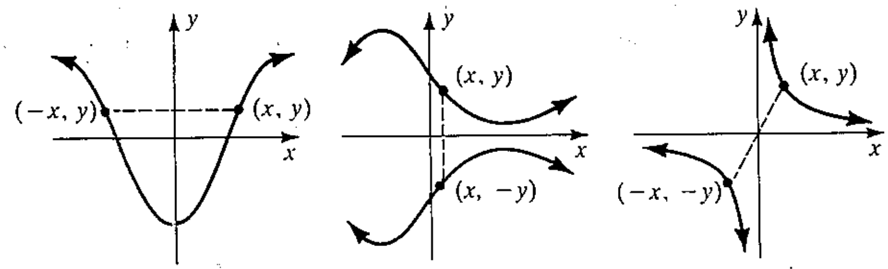
(b) Dos intersectos en y, ninguno en x.

(c) No hay intersectos.

FIGURA 14

SIMETRIA

Una gráfica puede también tener **simetría.** La figura 9 muestra que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y, ya que la porción de la gráfica que se localiza en el segundo cuadrante es la imagen especular de la porción de gráfica del primer cuadrante. Como lo ilustra la figura 15, una gráfica es **simétrica con respecto al eje y** si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, y)$ es también un punto de la gráfica. Una gráfica es simétrica con respecto al eje x si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(x, -y)$ es también un punto en la gráfica. Finalmente, una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ es también un punto de la gráfica. Cuando graficamos una ecuación, podemos determinar si su gráfica posee cualquiera de estas simetrías, *antes* de marcar puntos.



(a) Simetría con respecto al eje y (b) Simetría con respecto al eje x (c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 15

Pruebas de la simetría

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto:

(i) al **eje y** si al remplazar x por $-x$ produce una ecuación equivalente;
(ii) al **eje x** si al remplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente;
(iii) al **origen** si al remplazar x por $-x$ y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

La ventaja de utilizar la simetría al graficar debe ser manifiesta: si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y, entonces necesitamos marcar solamente puntos para $x \geq 0$, ya que los puntos de la gráfica para $x < 0$ se obtienen tomando las imágenes especulares, a través del eje y de los puntos del primero y cuarto cuadrantes.

EJEMPLO 8

Remplazando x por $-x$ en $y = x^2$ y utilizando $(-x)^2 = x^2$, vemos que

$$y = (-x)^2 \text{ es equivalente a } y = x^2$$

Esto prueba lo que está manifiesto en la figura 9: la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y.

El siguiente ejemplo ilustra cómo utilizar estos nuevos instrumentos como ayudas para la graficación.

EJEMPLO 9

Grafique la ecuación $x + y^2 = 10$.

Solución.

Intersectos: asignando $y = 0$ en la ecuación inmediatamente da $x = 10$. Así, el intersecto en x es 10. Cuando $x = 0$, obtenemos $y^2 = 10$, lo cual implica que $y = -\sqrt{10}$ o $y = \sqrt{10}$. Los intersectos en y son entonces, $-\sqrt{10}$ y $\sqrt{10}$.

Simetría: la gráfica es simétrica con respecto al eje x ya que, remplazando y por $-y$, encontramos que

$$x + (-y)^2 = 10 \text{ es equivalente a } x + y^2 = 10$$

Marcación de puntos: los registros de la tabla adjunta se obtuvieron asignándole valores a y. Notamos que, debido a la simetría, solamente necesitamos considerar $y \geq 0$. Los puntos coloreados en la figura 16(a) en el tercero y cuarto cuadrantes se obtuvieron tomando las imágenes especulares de los puntos que se marcaron en el primero y segundo cuadrantes.

Utilizando toda la información anterior, obtenemos la gráfica de la figura 16(b).

x	y
9	1
6	2
1	3
−6	4

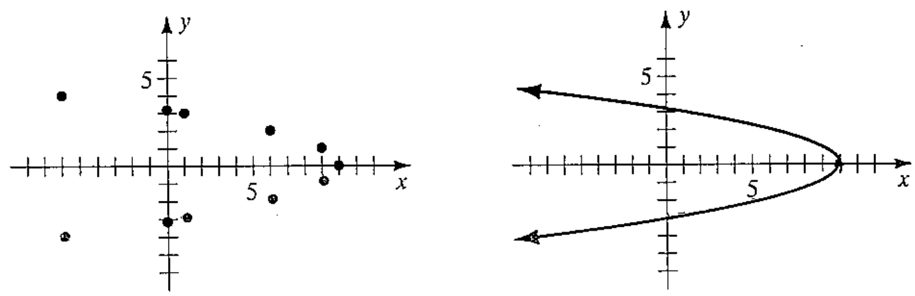


FIGURA 16 (a) (b)

EJERCICIO 3.1

En los problemas 1 al 4, marque los puntos dados.

1. (2, 3), (4, 5) (0, 2), (−1, 3)
2. (2, 5), (−2, 1) (−6, 0), (−3, −3)
3. (−5/2, −1) (−1, −1), (−4, 4), (0, 2)
4. (2, −2), (3.1, −3.1), (0, 0.5), (−1, 0)

En los problemas 5 al 16, determine el cuadrante en el cual se localizan los puntos dados, si (a, b) está en el cuadrante 1.

5. $(a, -b)$
6. $(-a, b)$
7. (b, a)
8. $(-a, -b)$
9. $(-b, -a)$
10. $(-b, a)$
11. (a, a)
12. $(b, -a)$
13. $(-a, -a)$
14. $(b, -b)$
15. $(-a, a)$
16. $(-b, b)$
17. Marque los puntos dados en los problemas 5 al 16 si (a, b) es el punto mostrado en la figura 17.

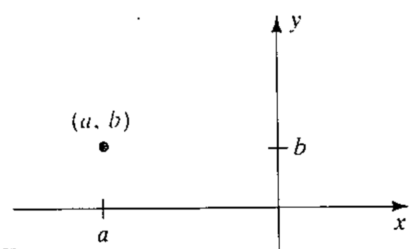


FIGURA 17

18. Dé las coordenadas de los puntos mostrados en la figura 18.

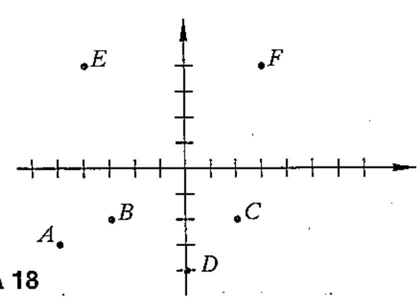


FIGURA 18

En los problemas 19 al 24, grafique la relación dada.

19. $\{(x, y)|xy = 0\}$
20. $\{(x, y)|xy \le 0\}$
21. $\{(x, y)|xy > 0\}$
22. $\{(x, y)|\ |x| \le 2, y = 1\}$
23. $|x| \ge 2/3$
24. $|y| < 1$

En los problemas 25 al 32, pruebe la simetría con respecto a los ejes x y y y el origen. No grafique.

25. $y = x^5 + x^3 - 2x$
26. $y = 8x^3 - 7x - 2$
27. $y = x\sqrt{x^2+1}$
28. $y = (x^2-1)^{2/3}$
29. $x^{5/3} - 5x^{2/3} - y^2 = 0$
30. $3xy^2 + y^2 = x$
31. $1/2xy - 1 = 0$
32. $x^2 y = 1$

En los problemas 33 al 70, grafique la ecuación dada. Halle intersectos. Use simetría cuando sea posible.

33. $x = 4$
34. $y = -3$
35. $y = x$
36. $y = -x$
37. $y - x = 1$
38. $3x + 2y = 12$
39. $y^2 = x$
40. $y = -x^2$
41. $y = x^2 - 3$
42. $y = -x^2 + 3$
43. $y = (x+1)^2$
44. $y = (x-1)^2$
45. $x - y^2 = 4$
46. $y^2 = 9(x+4)$
47. $y = x^3$
48. $y = -x^3$
49. $y^3 = x^3$
50. $y = x^4$
51. $y^2 = 1 - x^2$
52. $y^2 = x^3$
53. $|y| = x$
54. $y = |x|$
55. $|x + y| = 0$
56. $|x - y| = 0$
57. $|x - y| = 3$
58. $y = |x| - 3$
59. $x = |y| - 2$
60. $x^2 - 9 = 0$
61. $(x^2-4)(y-1) = 0$
62. $(2y-9)(5-x) = 0$
63. $x^3 - x = 0$
64. $y^2 + 9y - 10 = 0$
65. $x^2 + y^2 = 0$
66. $x^2 + y^2 = 4$
67. $9x^2/2 + 2y^2 = 18$
68. $4x^2 + 9y^2 = 36$
69. $x^2 - y^2 = 4$
70. $4y^2 - 9x^2 = 36$

En los problemas 71 al 74, utilice la simetría para completar la gráfica.

71. La gráfica es simétrica con respecto al origen.

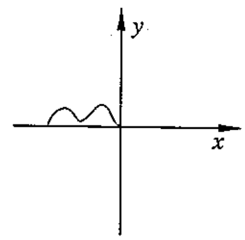


FIGURA 19

72. La gráfica es simétrica con respecto al eje x.

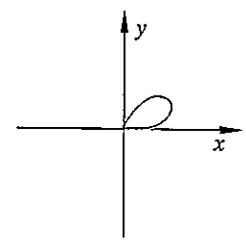


FIGURA 20

73. La gráfica es simétrica con respecto al eje y.

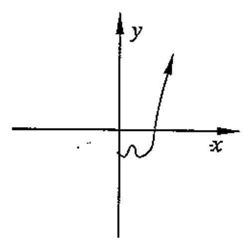


FIGURA 21

74. La gráfica es simétrica con respecto al eje x.

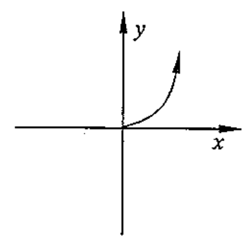


FIGURA 22

3.2 Fórmula de la distancia y de la circunferencia

En esta sección desarrollamos una fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cuyas coordenadas se conocen. Luego aplicamos esta fórmula al problema de encontrar la ecuación de la circunferencia.

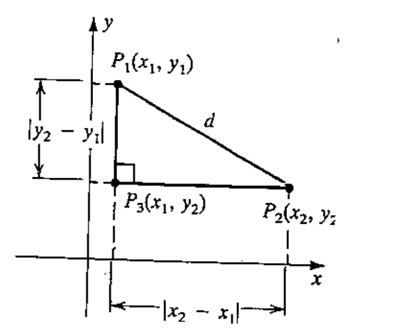


FIGURA 23

FORMULA DE LA DISTANCIA

Suponga que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos que no están en una línea vertical ni en una horizontal. Luego, como lo muestra la figura 23, P_1, P_2, y $P_3(x_1, y_2)$

son vértices de un triángulo rectángulo. La longitud del lado $P_3 P_2$ es $|x_2 - x_1|$, y la longitud del lado $P_1 P_3$ es $|y_2 - y_1|$. Si denotamos la longitud de $P_1 P_2$ con d, tenemos

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \tag{1}$$

del teorema de Pitágoras. Puesto que el cuadrado de cualquier número real es igual al cuadrado de su valor absoluto, podemos quitar los signos de valor absoluto en (1). Se deduce, entonces, de (1) que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A pesar de que derivamos esta ecuación para dos puntos que no están sobre una recta vertical o una horizontal, se aplica también en estos casos.

La fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ está dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

Puesto que $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$, no importa qué punto se utilice primero en la fórmula de la distancia: esto es

$$d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$$

EJEMPLO 1

Halle la distancia entre $A(8, -5)$ y $B(3, 7)$.

Solución

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3 - 8)^2 + (7 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

La distancia se ilustra en la figura 24.

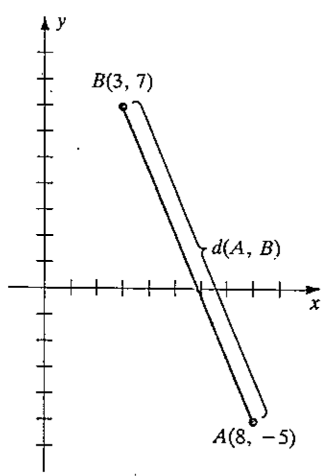


FIGURA 24

EJEMPLO 2

Determine si los puntos $P_1\,(7, 1)$, $P_2\,(-4, -1)$ y $P_3\,(4, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución. Por la geometría plana sabemos que un triángulo es un triángulo rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del lado restante. Ahora, por la fórmula de la distancia, encontramos

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (-1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(P_2, P_3) &= \sqrt{(4-(-4))^2 + (5-(-1))^2} \\
&= \sqrt{64+36} \\
&= \sqrt{100} = 10
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
d(P_3, P_1) &= \sqrt{(7-4)^2 + (1-5)^2} \\
&= \sqrt{9+16} \\
&= \sqrt{25} = 5
\end{aligned}
$$

Ya que

$$
\begin{aligned}
[d(P_3, P_1)]^2 + [d(P_2, P_3)]^2 &= 25 + 100 \\
&= 125 \\
&= [d(P_1, P_2)]^2
\end{aligned}
$$

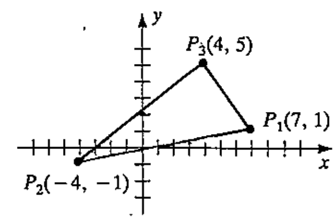


FIGURA 25

se deduce que P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo con un ángulo recto en P_3 (véase figura 25).

CIRCUNFERENCIAS

La fórmula de la distancia puede utilizarse para hallar una ecuación del conjunto de todos los puntos equidistantes del pundo dado.

DEFINICION 1

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a una distancia fija r dada, llamada **radio,** de un punto fijo C dado, llamado **centro.**

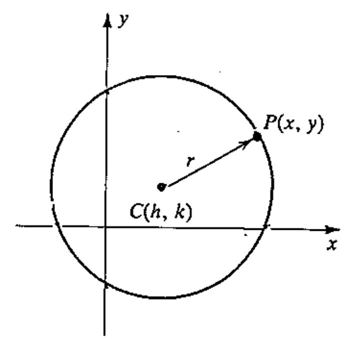


FIGURA 26

En la figura 26 hemos graficado una circunferencia de radio r centrada en el punto $C(h, k)$. Por la definición 1, sabemos que un punto $P(x, y)$ está en esta circunferencia si y sólo si

$$d(P, C) = r, \quad \text{o} \quad \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Ya que $(x-h)^2 + (y-k)^2$ es siempre no negativo, obtenemos una ecuación equivalente cuando ambos lados se elevan al cuadrado.

Ecuación de una circunferencia

Una circunferencia de radio r con centro $C(h, k)$ tiene la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{3}$$

La ecuación (3) se llama **forma estándar** de la ecuación de una circunferencia. Cuando $h = 0$ y $k = 0$, vemos por la ecuación (3) que la ecuación de una circunferencia de radio r con centro en el origen está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(Véase figura 27).

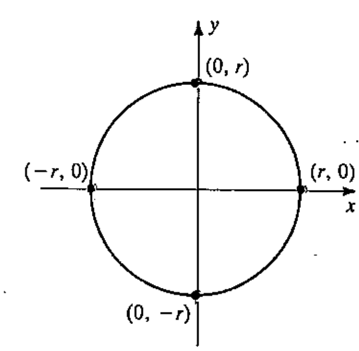


FIGURA 27

EJEMPLO 3

Halle el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 49$.

Solución. Si escribimos esta ecuación de la forma estándar (3),

$$(x-3)^2+(y-(-2))^2=7^2$$

vemos que $h=3$, $k=-2$ y $r=7$. Por tanto, la circunferencia está centrada en $(3,-2)$ y tiene radio 7.

EJEMPLO 4

Halle la ecuación de la circunferencia centrada en $C(-5, 4)$ con radio $\sqrt{2}$.

Solución. Utilizando la forma estándar (3) con $h=-5$, $k=4$ y $r=\sqrt{2}$, obtenemos

$$(x-(-5))^2+(y-4)^2=(\sqrt{2})^2$$

o

$$(x+5)^2+(y-4)^2=2$$

EJEMPLO 5

Halle la ecuación de la circunferencia con centro en $C(4, 3)$ que pasa por $P(1, 4)$.

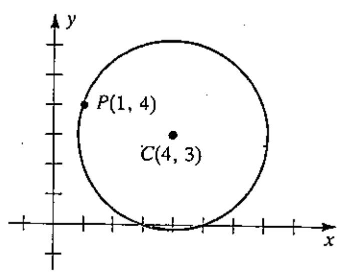


FIGURA 28

Solución. Identificando $h=4$ y $k=3$, tenemos por (3)

$$(x-4)^2+(y-3)^2=r^2 \tag{4}$$

Ya que $P(1, 4)$ se localiza en la circunferencia (véase figura 28), sus coordenadas deben satisfacer (4). Así,

$$(1-4)^2+(4-3)^2=r^2, \quad \text{o} \quad 10=r^2$$

y así, la ecuación en la forma estándar es

$$(x-4)^2+(y-3)^2=10$$

En el siguiente ejemplo utilizamos la técnica de *completar el cuadrado* para hallar el centro y el radio de una circunferencia. Recuerde de la sección 2.3 que añadiendo $(B/2)^2$ a la expresión x^2+Bx da como resultado $x^2+Bx+(B/2)^2$, el cual es el cuadrado perfecto de $(x+B/2)^2$.

EJEMPLO 6

Halle el centro y el radio de la circunferencia con ecuación

$$x^2+y^2+10x-2y+17=0$$

Solución. Podemos hallar el centro y el radio de la circunferencia reescribiendo la ecuación dada de la forma estándar $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Reorganizando términos, tenemos

$$(x^2+10x \quad\quad)+(y^2-2y \quad\quad)=-17$$

Ahora completamos el cuadrado de cada expresión en paréntesis, añadiendo $(10/2)^2$ en la primera y $(-2/2)^2$ en la segunda. Note que debemos tener cuidado al añadir estos números en ambos lados de la ecuación.

$$[x^2 + 10x + (\tfrac{10}{2})^2] + [y^2 - 2y + (\tfrac{-2}{2})^2] = -17 + (\tfrac{10}{2})^2 + (\tfrac{-2}{2})^2$$
$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 9$$
$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

De esta ecuación se deduce que la circunferencia está centrada en $(-5, 1)$ y tiene radio 3 (véase figura 29).

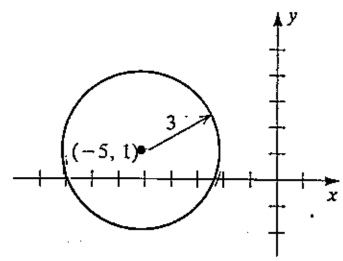


FIGURA 29

EJEMPLO 7

Halle el centro y el radio de una circunferencia con ecuación

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 2 = 0.$$

Solución. Primero reorganizamos la ecuación como

$$(3x^2 - 18x \qquad) + (3y^2 + 6y \qquad) = -2$$

Luego, dividimos ambos lados de la ecuación por 3 para que el coeficiente de x^2 y y^2 sea 1 para cada uno:

$$(x^2 - 6x \qquad) + (y^2 + 2y \qquad) = -\tfrac{2}{3}$$

Completando el cuadrado nos da

$$[x^2 - 6x + (\tfrac{-6}{2})^2] + [y^2 + 2y + (\tfrac{2}{2})^2] = -\tfrac{2}{3} + (\tfrac{-6}{2})^2 + (\tfrac{2}{2})^2$$
$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = -\tfrac{2}{3} + 9 + 1$$

o

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \tfrac{28}{3}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro $(3, -1)$ y radio $\sqrt{\tfrac{28}{3}}$.

Podemos ver que no todas las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

necesariamente representan una circunferencia. (Véanse problemas 39 y 40).

FORMULA DEL PUNTO MEDIO

En la sección 1.2 vimos que el punto medio de un segmento de recta entre dos números a y b de la recta numérica es el *promedio* $(a + b)/2$. En el plano xy, cada coordenada del punto medio M de un segmento de recta que une dos puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) es el promedio de las coordenadas correspondientes de los extremos.

Para probar esto, podemos ver en la figura 30 que los triángulos P_1CM y MDP_2 son congruentes, puesto que los ángulos correspondientes son iguales y $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Por tanto,

$$d(P_1, C) = d(M, D)$$

o

$$y - y_1 = y_2 - y$$

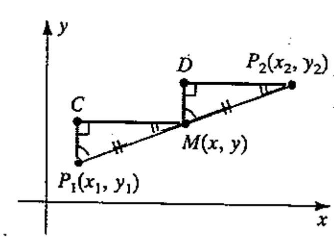


FIGURA 30

Despejando y en la última ecuación, da

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

De la misma manera $\quad d(C, M) = d(D, P_2)$

de modo que $\quad x - x_1 = x_2 - x$

y, por tanto $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Resumimos los resultados.

Fórmula del punto medio

Las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{5}$$

EJEMPLO 8

Halle las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une $A(-2, 5)$ y $B(4, 1)$.

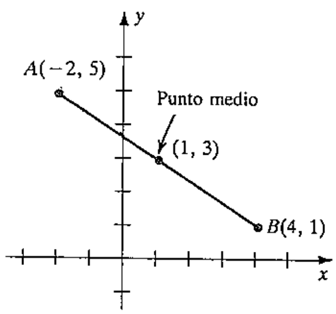


FIGURA 31

Solución. Según la fórmula del punto medio (5), las coordenadas del punto medio están dadas por

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 1}{2}\right)$$

ó (1, 3). Este punto se señala en la figura 31.

EJEMPLO 9

Halle una ecuación de la circunferencia con los puntos $A(2, -3)$ y $B(6, 1)$ en los extremos de un diámetro.

Solución. El centro del círculo es el punto medio del diámetro que une A y B. Así, según la fórmula del punto medio (5), las coordenadas del centro son

$$\left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{-3 + 1}{2}\right) = (4, -1)$$

El radio es la distancia desde el centro $(4, -1)$ hasta el punto $(2, -3)$ en la circunferencia:

$$r = \sqrt{(4 - 2)^2 + [-1 - (-3)]^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

Por tanto, una ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 8$$

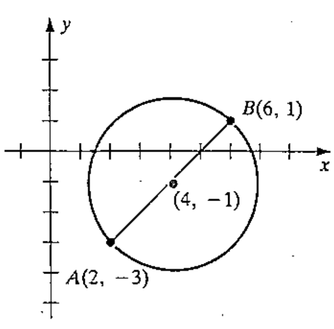


FIGURA 32

(Véase figura 32).

EJERCICIO 3.2

En los problemas 1 al 6, halle la distancia entre dos puntos.

1. $A(1, 3), B(5, 0)$
2. $A(1, 2), B(-3, 4)$
3. $A(1, -3/2), B(-2, 5/2)$
4. $A(-12, -3), B(-5, -7)$
5. $A(3/2, -3/2), B(-2, -1/2)$
6. $A(4, 3/2), B(2/3, -1)$

En los problemas 7 al 11, determine si los puntos A, B y C son vértices de un triángulo rectángulo.

7. $A(1, -11), B(8, 2), C(-2, -1)$
8. $A(10, 5), B(-3, -1), C(8, 1)$
9. $A(8, 2), B(-3, 0), C(5, 6)$
10. $A(4, 0), B(2, 3), C(1, 1)$
11. $A(-3, -2), B(2, 2), C(6, -3)$
12. Encuentre todos los puntos en el eje y que estén a 10 unidades del punto (6, 6).
13. Considere el segmento de recta que une $A(-1, 2)$ y $B(3, 4)$.
   (a) Halle una ecuación que exprese el hecho de que un punto $P(x, y)$ es equidistante de A y B.
   (b) Describa geométricamente el conjunto de puntos descritos por la ecuación de la parte (a).
14. Utilice la fórmula de la distancia para determinar si los puntos $A(-5, 2)$, $B(-1, -1)$ y $(3, -4)$, se localizan en una línea recta.

En los problemas 15 al 20, halle el punto medio del segmento de recta que une A y B.

15. $A(-2, 4), A(4, 1)$
16. $A(7/3, 1), B(2/3, -3)$
17. $A(-8, 5), B(-1, 0)$
18. $A(5/2, -3/2), B(-1, 3/4)$
19. $A(4a, 3b), B(2a, 6b)$
20. $A(x+1, -x), B(x-1, x-1)$

En los problemas 21 al 24, halle B si M es el punto medio del segmento de recta que une A y B.

21. $A(3/2, 1), M(-2, 0)$
22. $A(-3, -1/2), M(4, 3)$
23. $A(5, 8), M(-1, -1)$
24. $A(5, 2), M(-10, 1)$
25. Halle la distancia desde el punto medio del segmento de recta que une $A(5, 7)$ y $B(-3, 6)$ hasta el punto medio del segmento de recta que une $C(3, -5)$ y $D(0, 8)$.
26. Halle todos los puntos en el eje x que estén a 3 unidades del punto medio del segmento de recta que une $A(5, 2)$ y $B(-5, -6)$.
27. Los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 6)$ y $D(8, 6)$ son vértices de un paralelogramo. Demuestre que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí.
28. Halle los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ en el segmento de recta que une $A(3, 6)$ y $B(5, 8)$ que divide el segmento de recta en cuatro partes iguales.

En los problemas 29 al 38, halle el centro y el radio de la circunferencia dada.

29. $(x+3)^2+(y-5)^2=25$
30. $(x-1)^2+(y-3)^2=49$
31. $(x-3/2)^2+(y-1/2)^2=5$
32. $(x+8/3)^2+(y+5/3)^2=4$
33. $x^2+y^2+8y=0$
34. $x^2+y^2-4x+2y-4=0$
35. $x^2+y^2-16x+3y+63=0$
36. $x^2+y^2-16y+3x+63=0$
37. $6x^2+6y^2+12x+36y-12=0$
38. $5x^2+5y^2+25x+100y+50=0$

En los problemas 39 y 40, demuestre que la ecuación dada no representa una circunferencia.

39. $x^2+y^2+2x+8=0$
40. $4x^2+4y^2-4x+12y+12=0$

En los problemas 41 al 50, halle una ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

41. Centro (0, 0), radio 1
42. Centro (−3, 2), radio 6
43. Centro (0, 3), radio $\sqrt{3}$
44. Centro (−9, −4), radio 3/2
45. Extremos de un diámetro en (3, 8) y (−1, 4)
46. Extremos de un diámetro en (4, 5) y (−3, 2)
47. Centro (0, 0) pasando por (−1, −2)
48. Centro (−5, 4) pasando por (−3, 7)
49. Centro (5, 6), tangente al eje x
50. Centro (−3, −4), tangente al eje y

En los problemas 51 al 56, grafique la relación dada.

51. $x^2+y^2\geq 16$
52. $(x-5)^2+(y-1)^2\leq 25$
53. $x^2+y^2\geq 2y$
54. $1<x^2+y^2<4$
55. $(x+3)^2+(y+2)^2=0$
56. $x^2=-y^2$

57. Las ciudades de Kansas y Chicago no están conectadas por medio de una autopista interestatal, pera cada ciudad está conectada con St. Louis y Des Moines (véase figura 33). Des Moines está aproximadamente a 40 millas al oriente y a 180 millas al norte de la ciudad de Kansas; St. Louis está aproximadamente a 230 millas al oriente y 40 millas al sur de la ciudad de Kansas, y Chicago está aproximadamente a 360 millas al oriente y 200 millas al norte de la ciudad de Kansas. Suponga que esta parte del occidente medio es un plano liso y que las autopistas que conectan las ciudades son líneas rectas. ¿Cuál ruta de la ciudad de Kansas a Chicago, que atraviese a St. Louis o Des Moines, es más corta?

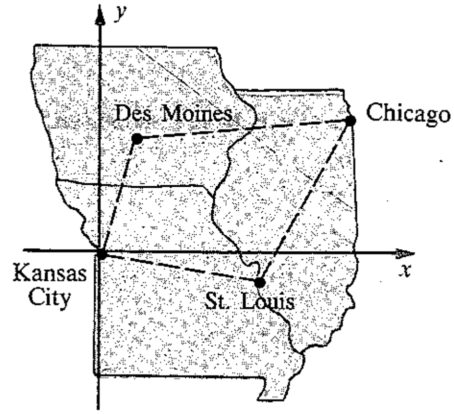


FIGURA 33

3.3 Ecuaciones de la recta

PENDIENTE

Cualquier par de puntos distintos en el plano determina una recta única. Si $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ son dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$, entonces al número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

se llama **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Es común llamar a $y_2 - y_1$ **incremento** en **y** a $x_2 - x_1$ **incremento** en **x**. La pendiente de una recta es, entonces,

$$m = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x} \tag{7}$$

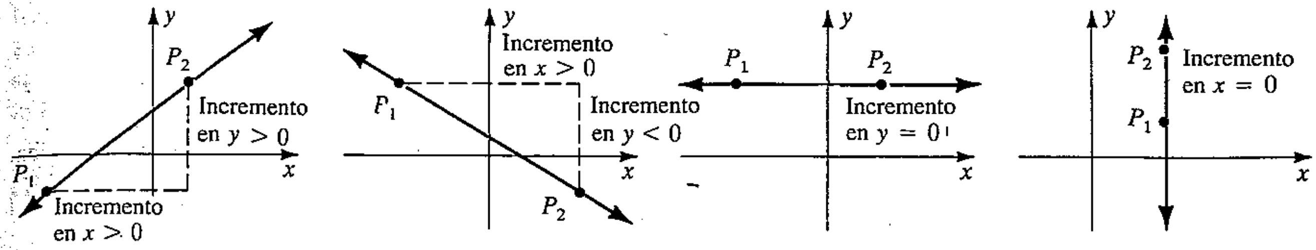
En la figura 34 comparamos las gráficas de las rectas con pendientes positivas, negativas, cero e indefinidas. En la figura 34(a) vemos que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) *crece* a medida que x aumenta. En la figura 34(b) vemos que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) *decrece* a medida que x aumenta. Una recta con pendiente cero ($m = 0$) es horizontal (véase figura 34(c)).

Si $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ son dos puntos en una recta vertical, entonces, $x_1 = x_2$ y entonces $x_2 - x_1 = 0$. Por tanto, la pendiente de esta recta es indefinida (véase figura 34(d)).

En general, puesto que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

no importa a cuál de los dos puntos se llame $P_1\ (x_1, y_1)$ y a cuál se llame $P_2\ (x_2, y_2)$ en (6).



(a) $m > 0$ (b) $m < 0$ (c) $m = 0$ (d) m indefinida

FIGURA 34

Cualquier par de puntos distintos en una recta determinará la misma pendiente. Para probar esto, considere los triángulos semejantes $P_1Q_1P_2$ y $P_3Q_2P_4$ mostrados en la figura 35. Puesto que sabemos que razones de los lados correspondientes son iguales, tenemos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Por tanto, la pendiente de la recta es independiente de la escogencia de puntos en la recta. A pesar de que este argumento se basó en la colocación de P_1, P_2 P_3 y P_4 sobre la recta, la discusión sigue siendo válida para cualquier colocación de estos 4 puntos.

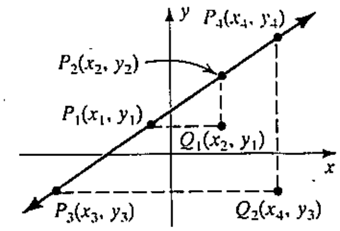


FIGURA 35

EJEMPLO 1

Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 6)$ y $(3, -4)$. Grafique la recta.

Solución. Sean $(-2, 6)$ el punto P_1 (x_1, y_1) y $(-3, 4)$ el punto P_2 (x_2, y_2). La pendiente de la recta a través de estos puntos es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 6}{3 - (-2)}$$

$$= \frac{-10}{5} = -2$$

Por tanto, la pendiente es -2 y la recta que pasa por P_1 y P_2 se muestra en la figura 36.

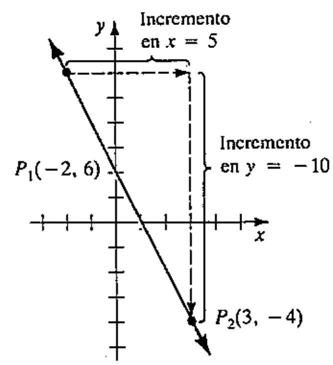


FIGURA 36

Note en el ejemplo 1 que si hubiéramos asignado a P_1 (x_1, y_1) el punto $(3, -4)$ y a P_2 (x_2, y_2) el punto $(-2, 6)$, entonces la ecuación (6) habría dado la misma pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (-4)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

EJEMPLO 2

Grafique la recta que pasa por el par de puntos dado y determine su pendiente.

(a) $(-4, -1)$ y $(5, 2)$
(b) $(-3, 3)$ y $(4, -4)$
(c) $(-5, 2)$ y $(-5, -4)$

Solución. En la figura 37 se marcan los puntos y se grafican las rectas. Las pendientes se calculan utilizando (6).

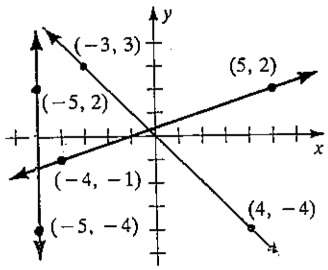


FIGURA 37

(a) $m = \dfrac{2-(-1)}{5-(-4)} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

(b) $m = \dfrac{-4-3}{4-(-3)} = \dfrac{-7}{7} = -1$

(c) Puesto que $(-5, 2)$ y $(-5, -4)$ determinan una recta vertical, la pendiente es indefinida.

EJEMPLO 3

Grafique la recta con pendiente $-\frac{5}{3}$ que pasa a través del punto $P(-2, 3)$.

Solución. Primero escribimos la pendiente como $-5/3$. Luego, utilizando el punto $P(-2, 3)$ como vértice, construimos un triángulo rectángulo moviendo 3 unidades a la *derecha* (ya que el incremento en x es $+3$) hasta el punto $Q(1, 3)$. De Q nos trasladamos 5 unidades hacia *abajo* (ya que el incremento en y es -5) hasta el punto $R(1, -2)$, el cual es otro punto de la recta trazado en la figura 38(a).

Alternativamente, podríamos haber considerado la pendiente como $5/(-3)$ y haber construido el triángulo moviendo 3 unidades a la *izquierda* (ya que el incremento en x es -3) hasta el punto $S(-5, 3)$. De S movemos 5 unidades hacia *arriba* (ya que el incremento en y es $+5$) hasta el punto $T(-5, 8)$. La recta se grafica ahora pasando por P y T, como se muestra en la figura 38(b).

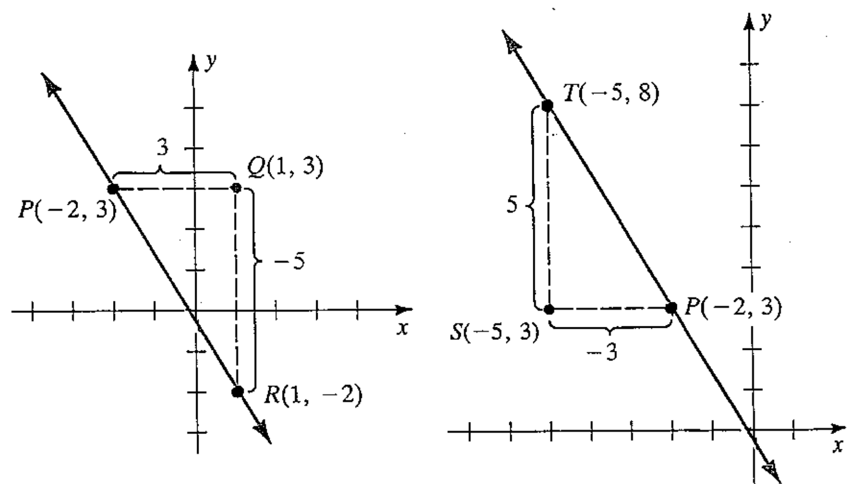


FIGURA 38 (a) (b)

ECUACIONES DE RECTAS

Ahora estamos en condiciones de encontrar una ecuación de una recta L. Para comenzar, suponga que la recta L mostrada en la figura 39 tiene pendiente m y pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$. Si $P(x, y)$ denota cualquier punto sobre L con $x \neq x_1$, entonces podemos escribir según (6).

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación puede reescribirse de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{8}$$

Note que las coordenadas de todos los puntos sobre L, incluyendo $P_1(x_1, y_1)$, satisfacen (8). Al contrario, si las coordenadas de un punto satisfacen (8), entonces el punto debe localizarse sobre L. Puesto que (8) se determinó conociendo la pendiente y un punto, decimos que es la **forma punto-pendiente** para la ecuación de una recta o, simplemente:

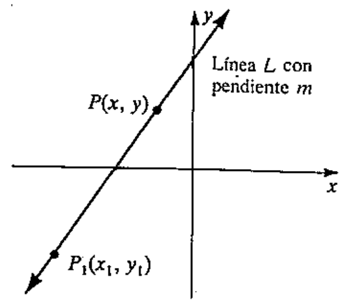


FIGURA 39

Ecuación de la recta punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{9}$$

EJEMPLO 4

Halle una ecuación de la recta con pendiente 4 que pasa por $(-\frac{1}{2}, 2)$.

Solución. Siendo $m = 4$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, y $y_1 = 2$, obtenemos de la ecuación (9) la ecuación de punto-pendiente

$$y - 2 = 4[x - (-\tfrac{1}{2})]$$

Simplificando, nos da

$$y - 2 = 4(x + \tfrac{1}{2}), \quad \text{o} \quad y = 4x + 4$$

EJEMPLO 5

Halle una ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y (−2, 5).

Solución. Primero, calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Luego, según (9) con $x_1 = 4$ y $y_1 = 3$, tenemos

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\tfrac{1}{3}(x - 4) \\ 3y - 9 &= -x + 4 \\ x + 3y - 13 &= 0 \end{aligned}$$

o despejando y,

$$y = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{13}{3}$$

Debemos verificar que se obtendrá la misma ecuación si las coordenadas x y y del punto $(-2, 5)$ se utilizan para x_1 y y_1 en (9).

Cualquier recta no vertical debe cortar el eje y. Si este punto de intersección es $(0, b)$, entonces b es el intersecto en y de la recta. Se puede obtener una ecuación de la recta con pendiente m e intersecto y en b según (9). Sustituyendo $x_1 = 0$ y $y_1 = b$ da

$$y - b = m(x - 0)$$

Esta ecuación se simplifica en lo siguiente.

Forma pendiente-intersecto de la ecuación de una recta

$$y = mx + b \tag{10}$$

EJEMPLO 6

Halle una ecuación de la recta con pendiente $\frac{2}{5}$ e intersecto y en -3.

Solución. Utilizando $m = \frac{2}{5}$ y $b = -3$ en la ecuación (10), tenemos

$$y = \tfrac{2}{5}x + (-3), \quad \text{o} \quad y = \tfrac{2}{5}x - 3$$

Puede demostrarse también que la gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta con pendiente m e intersecto b en el eje y.

RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

Vimos en la figura 34(c) que una recta horizontal tiene pendiente $m = 0$. Por lo tanto, se puede obtener, según (9), la ecuación de una recta horizontal que pasa por un punto (a, b):

$$y - b = 0(x - a), \quad \text{o} \quad y = b$$

Ecuación de una recta horizontal

$$y = b \tag{11}$$

Una recta vertical que pasa por (a, b) tiene pendiente indefinida, pero todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada x. Esta observación lleva al siguiente resultado.

Ecuación de una recta vertical

$$x = a \tag{12}$$

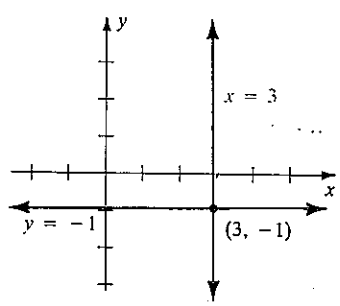


FIGURA 40

EJEMPLO 7

Halle ecuaciones para las rectas horizontales y verticales que pasan por $(3, -1)$. Grafique las rectas.

Solución. Cualquier punto de la recta vertical que pasa por $(3, -1)$ tiene a 3 como coordenada x. De la misma manera, cualquier punto de la recta horizontal que pasa por $(3, -1)$ tiene coordenada -1 en y. La ecuación de esta recta es $y = -1$. Ambas rectas se grafican en la figura 40.

ECUACION LINEAL

Las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) son casos especiales de la **ecuación lineal general**

$$ax + by + c = 0 \tag{13}$$

donde a y b no son ambos cero. Y, viceversa, cuando a y b no son ambos cero, la gráfica de (13) es una recta. Por ejemplo, si $b \neq 0$, entonces despejando y en (13) da la ecuación pendiente-intersecto $y = (-a/b)x + (-c/b)$. Sin embargo, si $b = 0$ y $a \neq 0$, la ecuación resultante $x = -c/a$ representa una recta vertical.

EJEMPLO 8

Halle la pendiente y el intersecto en y de la recta $3x - 7y + 5 = 0$.

Solución. Despejamos y en la ecuación lineal:

$$3x - 7y + 5 = 0$$
$$7y = 3x + 5$$
$$y = \tfrac{3}{7}x + \tfrac{5}{7}$$

Según (10), vemos que la pendiente de la recta es $m = \frac{3}{7}$ y el intersecto en y es $b = \frac{5}{7}$.

Si los intersectos en x y en y son diferentes, la gráfica de la recta puede dibujarse pasando por los puntos correspondientes sobre los ejes x y y.

EJEMPLO 9

Grafique la recta $3x - 2y + 8 = 0$.

Solución. Primero establecemos que $x = 0$ para hallar el intersecto en y:

$$3(0) - 2y + 8 = 0$$
$$-2y + 8 = 0$$
$$2y = 8$$
$$y = 4$$

Luego establecemos que $y = 0$ para hallar el intersecto en x:

$$3x - 2(0) + 8 = 0$$
$$3x + 8 = 0$$
$$3x = -8$$
$$x = -\tfrac{8}{3}$$

La gráfica, que se muestra en la figura 41, se dibuja pasando por (0, 4) y $(-\frac{8}{3}, 0)$.

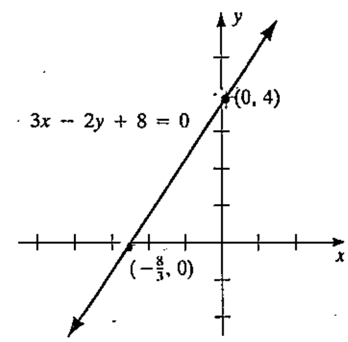


FIGURA 41

RECTAS PARALELAS

Dejamos como ejercicio probar el siguiente resultado sobre **rectas paralelas** (véase problema 57).

Pendiente para rectas paralelas

Dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$.

EJEMPLO 10

Las ecuaciones

$$3x + y = 2 \quad \text{y} \quad 6x + 2y = 15$$

pueden escribirse de las formas pendiente-intersecto

$$y = -3x + 2 \quad \text{y} \quad y = -3x + \tfrac{15}{2}$$

respectivamente. Vemos que la pendiente de cada recta es -3. Por tanto, las rectas son paralelas (véase figura 42).

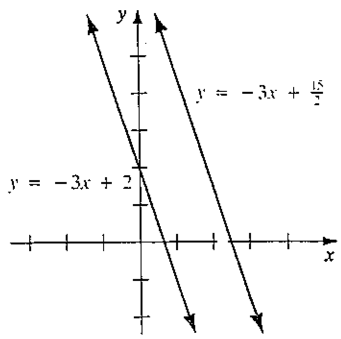


FIGURA 42

RECTAS PERPENDICULARES

Puede demostrarse que cuando dos rectas con pendientes definidas son *perpendiculares*, entonces sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. (Véase problema 58).

Pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son **perpendiculares** si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, esto es

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

EJEMPLO 11

Halle la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ que es perpendicular a la recta $4x - 3y + 6 = 0$. Grafique las rectas.

Solución. Expresamos la ecuación dada de la forma pendiente-intersecto de:

$$4x - 3y + 6 = 0$$
$$3y = 4x + 6$$
$$y = \tfrac{4}{3}x + 2$$

Según (10), sabemos que esta recta tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de una recta perpendicular a ella será el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, ó $-\frac{3}{4}$. Por tanto, la recta que estamos buscando tiene pendiente $-\frac{3}{4}$ e intersecto y en -3. Su ecuación es

$$y = -\tfrac{3}{4}x - 3$$

y su gráfica es la recta de color de la figura 43.

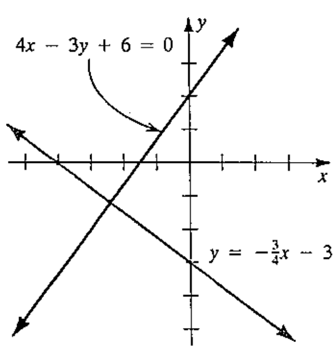


FIGURA 43

EJERCICIO 3.3

En los problemas 1 al 6, halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

1. (3, –7), (1, 0)
2. (–4, –1), (1, –1)
3. (–6, –8), (5, 3)
4. (1, –2), (6, 4)
5. (3, 2), (–1, –2)
6. (2, –1/2), (8, 5/2)

En los problemas 7 al 12, grafique la recta que pasa por (1, 2) con la pendiente dada.

7. 1/10
8. 2/3
9. –3
10. –1/2
11. –1
12. –5/3

En los problemas 13 al 30, halle una ecuación de la recta indicada.

13. Pasa por el punto (3, 5) con pendiente 3
14. Pasa por el punto (2, –2) con pendiente –1
15. Pasa por el punto (4, 0) con pendiente 4
16. Pasa por los puntos (5, –6) y (4, 0)
17. Pasa el punto (–3, 1) con pendiente 1/4
18. Pasa por los puntos (2, 3) y (6, –5)
19. Pasa por los puntos (8, 1) y (–3, 1)
20. Pasa por los puntos (0, 7) y (7, –2)
21. Pasa por los puntos (3, –6) y (–6, 3)
22. Pasa por el punto (4, –3) con pendiente 0
23. Pasa por el punto (–3, 1) con pendiente –2/3
24. Pasa por los puntos (–1, –3) y (0, 4)
25. Pasa por los puntos (–2, 0) y (2, 6)
26. Pasa el punto (0, 5) con pendiente 1/2
27. Pasa el punto (0, 0) con pendiente m
28. Pasa por los puntos (0, 0) y (a, b)
29. Con intersecto x en –2 e intersecto y en 7
30. Con intersecto x en 4 e intersecto y en –2

En los problemas 31 al 36, halle la pendiente y el intersecto en y de la recta dada.

31. $4y-12x+15=0$
32. $x+y+1=0$
33. $-3x+y=0$
34. $-2x-4y=0$
35. $3x-\frac{y}{2}+2=0$
36. $ax+by+c=0$

En los problemas 37 al 42, haga la gráfica de la recta dada.

37. $2x+5y-8=0$
38. $3x/4-y/3=2$
39. $3x-2y=9$
40. $-2x-4y+6$
41. $3x-4y+12=0$
42. $y=2x/3+1$
43. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–2, 4) y es paralela a $x+3y-2=0$.
44. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–1, –2) y es paralela a la recta $3x-2y-2=0$.
45. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–2, 5) y es perpendicular a $2x+3y-4=0$.
46. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–2, 0) y es perpendicular a $4x+3y+5=0$.
47. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–5, 4) y es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (3, 7).
48. Halle la ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une (1/2, 10) y (3/2, 4).
49. Halle la ecuación de la recta L mostrada en la figura 44.

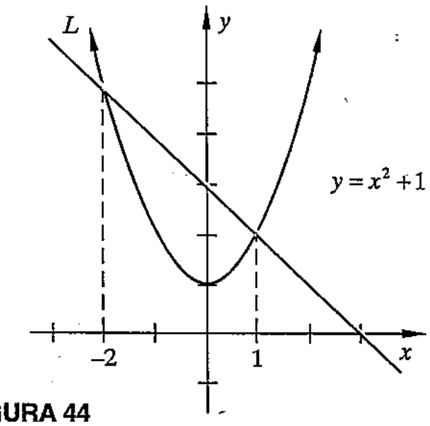


FIGURA 44

50. Una recta tangente a una circunferencia en un punto P de la circunferencia es perpendicular a la recta que pasa por P y por el centro de la circunferencia. Halle la ecuación de la tangente L mostrada en la figura 45.

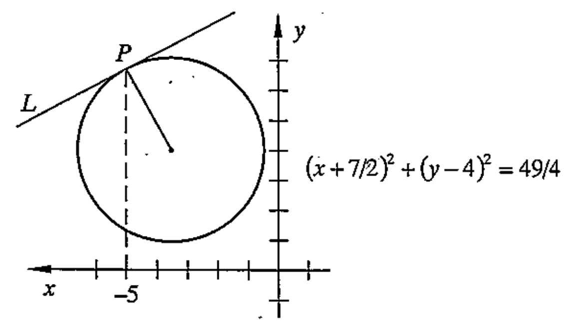


FIGURA 45

En los problemas 51 al 54, determine cuáles de las rectas dadas son paralelas entre sí y cuáles perpendiculares entre sí.

51. **(a)** $2x+4y+3=0$
(b) $x+9=0$
(c) $x=4$
(d) $y-6=0$
(e) $-x-2y+6=0$
(f) $2x-y=2$
52. **(a)** $5x=-3y$
(b) $3x-5y+9=0$
(c) $3x+5y=-4$
(d) $-3x+5y=2$
(e) $5x-3y-2=0$
(f) $-5x-3y+8=0$
53. **(a)** $y=4x+1$
(b) $y=x/4-3$
(c) $y=-4x$
(d) $y=-x/4-1/4$
(e) $y=6+9/2$
(f) $y=-x/6-12$
54. **(a)** $2y-3=0$
(b) $3x+4y=2$

(c) $x=5$
(d) $8x-6y+5=0$
(e) $3x-2y+2=0$
(f) $4x+6y-1=0$

En los problemas 55 y 56 use la gráfica de la recta dada para calcular su pendiente.

55.

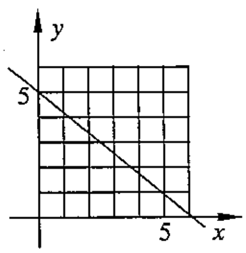


FIGURA 46

56.

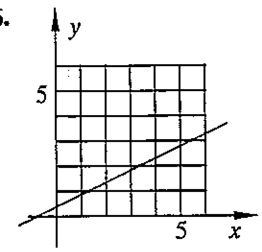


FIGURA 47

57. Pruebe que las rectas no verticales L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si tienen pendientes iguales. [*Sugerencia*: use la figura 48 y triángulos semejantes].

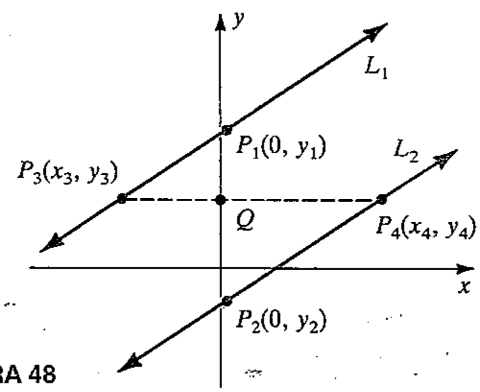


FIGURA 48

58. Pruebe que dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. [*Sugerencia:* utilice la figura 49 y el teorema de Pitágoras].

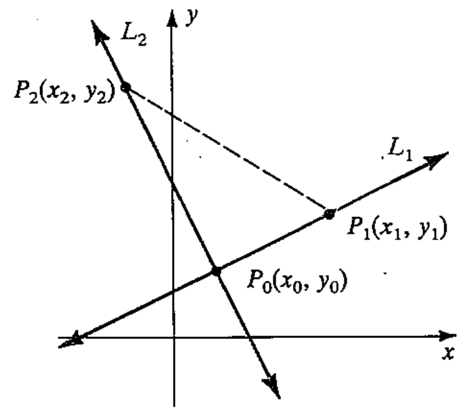


FIGURA 49

59. En 1897 el profesor de física A. E. Dolbear propuso que la temperatura T, en grados Fahrenheit, en un termómetro de "cricket" (o de grillo) está dada por

$$T = x/4 + 40$$

donde x es el número de chillidos del grillo por minuto. Si el número de chillidos del grillo por minuto se aumenta en 10, halle el correspondiente aumento de temperatura.

3.4 Funciones y notación de funciones

DEFINICION DE FUNCION

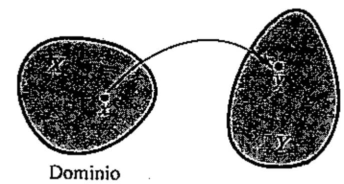
Al usar personas y objetos del mundo que nos rodea, es fácil establecer una *regla de correspondencia* que asocie o haga parejas de los miembros de un grupo con los miembros de otro. Por ejemplo, para cada nombre que aparece en el directorio de Los Angeles hay un número, a cada bebé le corresponde una madre, a cada auto registrado en el estado de California le corresponde un número de placa, a cada libro le corresponde un autor, a cada lanzador de los Dodgers le corresponde un registro de partidos ganados y perdidos, etc. En matemáticas estamos interesados en una clase de correspondencia muy especial, llamada función.

DEFINICION 2

> Una **función** de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que le asigna a cada elemento x en X uno y sólo un elemento y en Y. El conjunto X se llama **dominio** de la función.

A menudo utilizamos un diagrama, como el de la figura 50 para ilustrar la correspondencia de todos los elementos del conjunto X con algunos o todos los elementos del conjunto Y. La figura 50 indica también la característica fundamental de una función: a cada elemento x en el conjunto X le corresponde un *único* elemento y en el conjunto Y.

En el resto de este capítulo asumiremos que tanto X como Y son subconjuntos del conjunto R de números reales.



Dominio

FIGURA 50

EJEMPLO 1

(a) La tabla (a), que se muestra aquí, define una regla de correspondencia entre los números del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y los números del conjunto $\{5, 7, 9, 11, 13\}$. Esta correspondencia es una función, ya que uno y sólo un número y se asocia con un número x. El conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ es el dominio de la función. Observe que apareamos todos los elementos de X con sólo algunos de los elementos del conjunto $Y = \{5, 7, 9, 11, 13\}$.

(b) La tabla (b) de la derecha define una regla de correspondencia entre el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y el conjunto $\{4, 5, 6, 7\}$. Esta correspondencia no es una función porque hay dos números —a saber, 6 y 7— en el conjunto $\{4, 5, 6, 7\}$ asociados con el número 3 en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

x		y
1	$\rightarrow$	5
2	$\rightarrow$	7
3	$\rightarrow$	9
4	$\rightarrow$	11

(a)

x		y
1	$\rightarrow$	4
2	$\rightarrow$	5
3	$\rightarrow$	6
	$\searrow$	7

(b)

DEFINICION ALTERNATIVA

Puesto que una regla de correspondencia generará pares de elementos, podemos definir una función de una manera alternativa:

Una **función** es un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que no hay dos pares ordenados diferentes del conjunto que tienen el mismo primer elemento.

EJEMPLO 2

El conjunto de pares ordenados $\{(1, 3), (3, 5), (6, 7), (8, 7)\}$ es equivalente a la correspondencia mostrada en la tabla adjunta. Puesto que a cada valor de x le corresponde uno y sólo un valor de y, el conjunto de pares ordenados representa una función. Observe que es perfectamente aceptable hacer corresponder el mismo valor de y a más de un valor de x.

x		y
1	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	5
6	$\rightarrow$	7
8	$\nearrow$	

Una función usualmente se denota con una letra como f o g. Luego, podemos representar una función f de un conjunto X a uno Y por medio de la notación $f: X \rightarrow Y$ o por medio de un diagrama (véase figura 51). El número y del conjunto Y mostrado en la figura 51 que está asociado con x por medio de la función f se escribe

$$y = f(x)$$

lo cual se lee "y es igual a f de x". También se dice que el número $f(x)$ es el **valor** de la función f en x o la **imagen** de x sobre f.

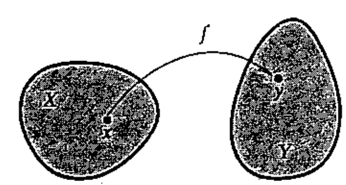


FIGURA 51

A menudo una función se define por medio de una fórmula explícita, por ejemplo $f(x) = x^2$. Si el dominio de f es el conjunto R de números reales, entonces $f: R \rightarrow R$, ya que el cuadrado de un número real es un número real. Para hallar valores de f, sustituimos números reales para x en la fórmula $f(x) = x^2$. Por ejemplo, el valor de la función que corresponde a $x = 3$ es

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

y el valor de la función en $x = -4$ es

$$f(-4) = (-4)^2 = 16$$

En términos de notación de intervalo, el dominio de $f(x) = x^2$ se escribe como $(-\infty, \infty)$.

En términos exactos, la función f es la regla dada por $y = f(x)$, mientras que $f(x)$ es simplemente un número asociado con x. Sin embargo, frecuentemente ignoremos esta distinción y nos referiremos a la "función $f(x)$."

Una función también puede compararse con una computadora. Un número x es la *entrada* a la "máquina" y el **valor funcional** $f(x)$ correspondiente es el *resultado* obtenido después de que la máquina ha obrado sobre x, como lo ilustra la figura 52.

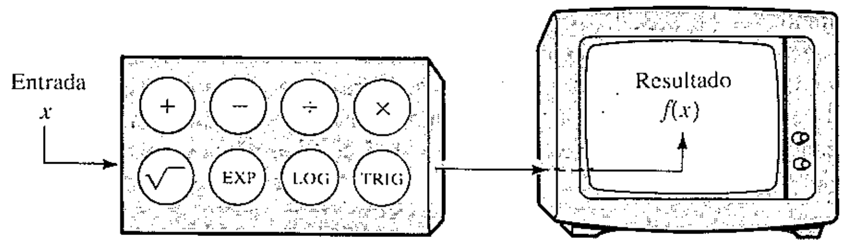


FIGURA 52

EJEMPLO 3

Halle los valores de $f(x) = \sqrt{x + 4}$ correspondientes a $x = 0, 5, 8,$ y 12.

Solución. Esta "máquina" de funciones toma un valor de x tal como $x = 0$, le suma un número 4, y luego saca la raíz cuadrada de esta suma. Este proceso se ilustra en la figura 53. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2 \\ f(5) &= \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3 \\ f(8) &= \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{y} \\ f(12) &= \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

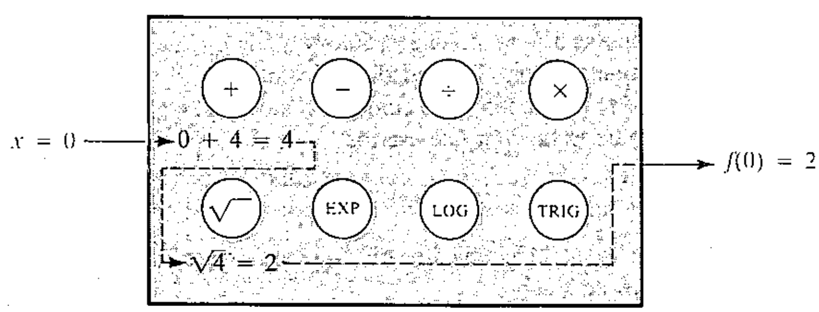


FIGURA 53

VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Puesto que el valor de la variable y en $y = f(x)$ siempre depende de la elección de x, decimos que y es la **variable dependiente.** Por el contrario, la elección de x es independiente de y, por tanto, x se llama **variable independiente.**

EJEMPLO 4

Si $f(x) = x^2 - x + 1$, halle $f(-1)$, $f(x + h)$, y $f(x^2 + 1)$.

Solución. Remplazamos la variable independiente x por -1, $x + h$ y $x^2 + 1$ a su vez. Para enfatizar este remplazo, escribimos la función original como

$$f(\quad) = (\quad)^2 - (\quad) + 1$$

Por tanto, para las entradas dadas, tenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - (-1) + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \\ f(x + h) &= (x + h)^2 - (x + h) + 1 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(x^2 + 1) &= (x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) + 1 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 1 + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

El **cociente diferencia**

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

donde h es un número real diferente de cero, juega un papel muy importante en el estudio del cálculo.

EJEMPLO 5

Si $f(x) = x^2 - x + 1$ y $h \neq 0$, halle

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

y simplifique.

Solución. Según el ejemplo 4, tenemos

$$f(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= 2xh + h^2 - h \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2xh+h^2-h}{h}\\ &= \frac{h(2x+h-1)}{h}\\ &= 2x+h-1\end{aligned}$$

RANGO

En nuestra analogía con la máquina, el dominio de una función es el conjunto de todas las entradas reales que dan resultados reales. El conjunto de resultados se llama *rango* de la función. Formalmente, definimos el **rango** de una función f con dominio X como el resultado $\{f(x) \mid x \in X\}$. Por ejemplo, el rango de la función $f(x) = x^2$ es el conjunto de números reales no negativos.

Cuando una función se define por medio de una fórmula,

se considera que el dominio es el conjunto de números reales para los cuales la fórmula tiene sentido en el sistema de los números reales.

A menudo a este conjunto se denomina *dominio implícito o natural* de la función. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos.

EJEMPLO 6

Halle el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Solución. Puesto que el radicando $x + 4$ debe ser no negativo, el dominio se determina por medio de la inecuación $x + 4 \geq 0$; esto es, el dominio es el conjunto de $\{x \mid x \geq -4\}$. Utilizando notación de intervalo, escribimos el dominio como $[-4, \infty)$.

EJEMPLO 7

Halle el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

Solución. Un cociente de dos números reales es un número real a menos que el denominador sea cero. Por tanto, el dominio de la función f consiste en todos los números reales x *excepto* los que satisfacen

$$x^2 - 4 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 2$ y $x = -2$. Por tanto, el dominio de la función es el conjunto $\{x \mid x \neq \pm 2\}$.

EJEMPLO 8

El dominio de la función

$$g(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

es el conjunto R de números reales, puesto que no hay número real x para el cual $x^2 + 4 = 0$.

EJEMPLO 9

Halle el dominio y el rango de $g(x) = 5 + \sqrt{x - 3}$.

Solución. El dominio, determinado por el requerimiento $x - 3 \geq 0$, es $\{x \mid x \geq 3\}$. Puesto que $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$, tenemos $5 + \sqrt{x - 3} \geq 5$ para estos mismos valores de x. Por tanto, el rango de g es $\{y \mid y \geq 5\}$.

Como lo ilustra el siguiente ejemplo, el problema de determinar si un número simple r está en el rango de la función $y = f(x)$, es equivalente a resolver la ecuación $f(x) = r$.

EJEMPLO 10

Determine si 7 está en el rango de $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

Solución. El dominio de f es el intervalo $[1, \infty)$. Ahora, resolviendo $f(x) = 7$ da

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 1} &= 7 \\ x - 1 &= 49 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Por tanto, el número 7 está en el rango de f, ya que 50 está en su dominio y

$$\begin{aligned} f(50) &= \sqrt{50 - 1} \\ &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Una regla que defina una función puede incluir más de una fórmula. Una función definida de esta manera se llama **función definida a trozos.** Por ejemplo,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones sino una función en la cual la regla se da en dos partes o trozos. En este caso, una parte se utiliza en los números reales negativos y la otra en los números reales no negativos. Por ejemplo, puesto que -4 es negativo, la regla indica que elevando al cuadrado el número:

$$g(-4) = (-4)^2 = 16$$

y puesto que 6 es positivo, le sumamos 1:

$$g(6) = 6 + 1 = 7$$

FUNCIONES CONSTANTES

Si c representa un elemento de cualquier conjunto, entonces a la función f definida por $f(x) = c$ para todos los x del dominio de f se llama **función constante.** Por ejemplo, suponga que el dominio de f es el conjunto R de números reales y $f(x) = 5$. Entonces,

$$f(0) = 5, \quad f(-1) = 5, \quad f(\sqrt{2}) = 5, \quad f(\pi) = 5, \quad f(2.57) = 5, \quad \text{etc.}$$

APLICACIONES

Muchas fórmulas de la geometría y la ciencia definen funciones. Por ejemplo, el área A de un cuadrado es una función de la longitud de un lado. Si x denota la longitud de un lado de un cuadrado, entonces $A = x^2$. El área A y la longitud de la circunferencia C de un círculo son funciones de su radio r: $A = \pi r^2$ y $C = 2\pi r$. La distancia s con la que un cuerpo cae bajo la influencia de la gravedad es una función de tiempo: t: $s = 16t^2$.

En el estudio de aplicaciones en cursos de matemáticas subsecuentes (por ejemplo, cálculo), a menudo es necesario establecer una relación funcional entre dos variables, interpretando datos escritos. Considere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 11

Se bombea agua en un tanque cónico cuya altura es de 12 pies y cuyo radio es de 4 pies. Exprese el volumen del agua en cualquier momento, como una función de su profundidad.

Solución. El tanque cónico se ilustra en la figura 54(a), y un corte transversal del tanque se muestra en la figura 54(b).

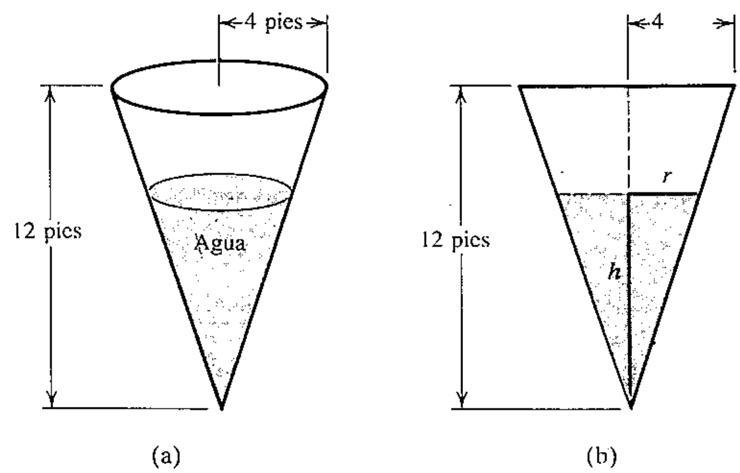


FIGURA 54
(a) Tanque cónico; (b) corte transversal.

Hemos introducido las variables r y h para denotar el radio y la profundidad del agua, respectivamente. Ahora vemos que el volumen del agua es el volumen de un cono circular recto. De la geometría sabemos que el volumen de tal cono está dado por

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \tag{14}$$

Puesto que los triángulos rectángulos mostrados en la figura 54(b) son semejantes, las longitudes de sus lados son proporcionales: $r/h = 4/12$. Sustituyendo $r = \frac{1}{3}h$ en (14) nos da entonces el volumen del agua en cualquier momento como una función de profundidad h:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h, \quad \text{o} \quad V = \frac{\pi}{27}h^3$$

EJEMPLO 12

Exprese el área A de un círculo como una función de la longitud de su circunferencia C.

Solución. El área A y la longitud de la circunferencia C de un círculo son funciones del radio del círculo:

$$A = \pi r^2 \quad \text{y} \quad C = 2\pi r$$

Ahora, de la segunda de estas ecuaciones obtenemos $r = C/2\pi$. Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación de A como una función de C:

$$A = \pi(C/2\pi)^2, \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{4\pi}C^2$$

EJERCICIO 3.4

En los problemas 1 al 6, determine si la correspondencia dada por el conjunto de pares ordenados (x, y) es una función.

1. $\{(1,2),(2,-3),(3,4),(-4,1),(1,5)\}$
2. $\{(1,1),(2,8),(-1,1),(-2,8)\}$
3. $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$
4. $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$
5. $\{(4,2),(-4,3),(8,6),(5,4)\}$
6. $\{(-3,2),(6,2),(-3,9),(-6,9)\}$
7. Si $f(x)=x^2-2$, halle $f(0), f(-1), f(\sqrt{2})$ y $f(2)$.
8. Si $f(x)=x^2-2x$, halle $f(0), f(1), f(\sqrt{2})$ y $f(-2)$.
9. Si $f(x)=\sqrt{x+1}$, halle $f(0), f(-8), f(1/2)$ y $f(-1/2)$.
10. Si $f(x)=\sqrt{4+2x}$, halle $f(0), f(4), f(-2)$ y $f(-3/2)$.
11. Si $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-1}$, halle $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2})$ y $f(1/2)$.
12. Si $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-8}$, halle $f(0), f(-2), f(\sqrt{2})$ y $f(-1/2)$.
13. Si $f(x)=x^2-3x^3$, halle $f(a^2), f(a-1), f(a+1)$ y $f(1/b)$.
14. Si $f(x)=2x^2-x^4$, halle $f(a), f(a+1), f(a^2)$ y $f(1/b)$.
15. Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3\\ 6, & x=3\end{cases}$ halle $f(3)$, $f(-3)$.
16. Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-16}{x^2-4}, & x\neq \pm 2\\ 3, & x=-2\\ 4, & x=2\end{cases}$ halle $f(-1), f(-2)$ y $f(2)$.
17. Si $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\geq 1\\ -x^3, & x<1\end{cases}$ halle $f(0), f(1), f(\sqrt{2})$ y $f(-2)$.
18. $f(x)=\begin{cases}4x+3, & \text{si } -2\leq x<0\\ 1+x^2, & \text{si } 0\leq x\leq 2\\ 7, & \text{si } x>2\end{cases}$ halle $f(0), f(1), f(-1)$ y $f(2)$.

En los problemas 19 al 22, halle

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

donde $h\neq 0$ es una constante.

19. $f(x)=x^2+2$
20. $f(x)=-3x+x^2+5$
21. $f(x)=x^3$
22. $f(x)=1/\sqrt{x}$

En los problemas 23 y 24, halle

$$\frac{f(x)-f(a)}{h}$$

donde $h\neq a$ es una constante.

23. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$
24. $f(x)=x^3+x-1$

En los problemas 25 al 34, halle el dominio de la función.

25. $f(x)=\sqrt{3x+2}$
26. $f(x)=\sqrt{15-15x}$
27. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2}$
28. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3x^2+5x-2}}$
29. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-16}}$
30. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$
31. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2}$
32. $f(x)=\dfrac{5}{x\sqrt{x+4}}$
33. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$
34. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+6}$

En los problemas 35 al 42, halle el dominio y el rango de la función.

35. $f(x)=3x-15$
36. $f(x)=2x^2-4$
37. $f(x)=x^3$
38. $f(x)=\sqrt{x-4}$
39. $f(x)=-1+\sqrt{6x-2}$
40. $f(x)=2+\sqrt{3x-1}$
41. $f(x)=\sqrt{16-3x}$
42. $f(x)=10-|x|$
43. ¿Para qué valores de x es $f(x)=\sqrt{x-3}$ igual a 3?
44. ¿Para qué valores de x es $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ igual a 0?

45. ¿Para qué valores de x es $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le 1\\ 1+x/2, & 1<x\le 2\end{cases}$ igual a 0?, ¿a 2?

46. Determine si los números $5y-5$ están en el rango de la función $g(x)=x(x-4)$.

47. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de la longitud s de un lado.

48. Exprese el perímetro P de un cuadrado como una función de su área A.

49. Exprese el área A de un círculo como función de su diámetro d.

50. Exprese el área A de un triángulo equilátero como una función de la altura h de un triángulo.

51. Exprese el volumen de un cubo como una función del área A de su base.

52. Exprese el área de la superficie de un cilindro circular recto de volumen 1 m^3 como una función de su radio r.

53. Con un pedazo de cartulina rectangular se hace una caja abierta, recortando un cuadrado de longitud x de cada esquina y doblando luego los lados hacia arriba. Si la cartulina mide 3 pies por 4 pies (figura 55), exprese el volumen V de la caja como una función de x.

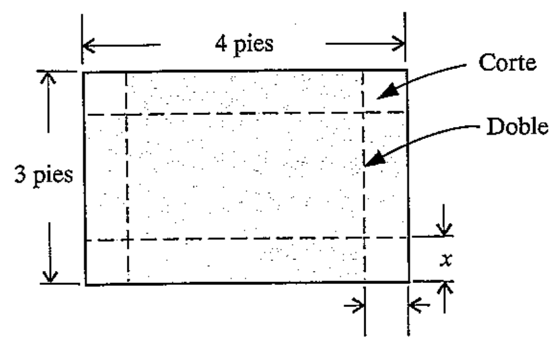


FIGURA 55

54. Con un pedazo de metal de 1 por 20 pies se hace un canal con un corte transversal rectangular, doblando hacia arriba cantidades x iguales del lado de 1 pie (véase figura 56). Exprese el volumen V de la canal como una función de x.

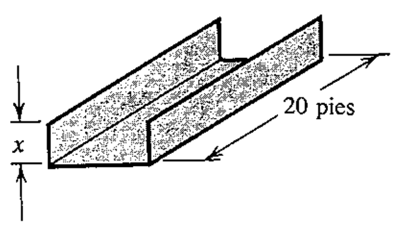


FIGURA 56

55. Se va a construir una caja rectangular abierta con una base cuadrada de longitud r y un volumen de 20,000 cm^3. Exprese el área de la superficie S de la caja como una función de x.

56. Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua. La cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro caras verticales, todas hechas de concreto, y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto tiene un costo de US\$1.50 por pie cuadrado y el acero cuesta US\$4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de la longitud del lado de la base cuadrada.

57. Se va a cercar un pedazo rectangular de tierra de forraje y se va a dividir en dos porciones iguales por medio de un cercado adicional paralelo a dos lados. La porción de tierra tiene 4,000 m^2. Exprese la cantidad de cercado F en términos de la longitud x mostrada en la figura 57.

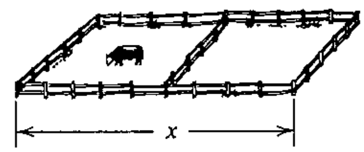


FIGURA 57

58. Una persona de 6 pies de altura camina hacia un farol de 20 pies, como se muestra en la figura 58. Exprese la longitud L de su sombra como una función de su distancia x desde el farol.

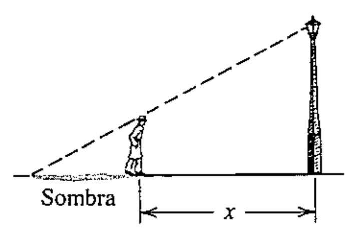


FIGURA 58

59. La ventana que se muestra en la figura 59 consta de un rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Exprese el área A de la ventana como una función del ancho x indicado, si se sabe que el perímetro de la ventana es de 30 m.

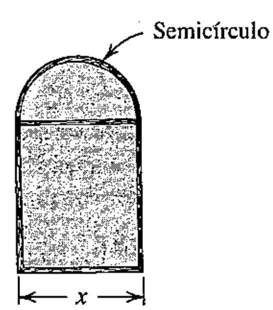


FIGURA 59

60. Un alambre de longitud L se corta en x unidades de un extremo. Un pedazo de alambre se dobla en forma de círculo y el otro se dobla en forma de cuadrado. Exprese la suma S de las áreas como una función de x.

61. Dos calles se interceptan como se muestra en la figura 60. A las 12:00 p.m. el auto A atraviesa el intersecto recto y se dirige hacia el sur con una velocidad constante de 50 mph. Al mismo tiempo, el auto B está a 4 millas este del intercepto y viaja hacia el occidente con una velocidad constante de 30 mph; siendo $t = 0$ la representación de las 12:00 p.m., exprese la distancia d entre los dos autos como una función de tiempo $t > 0$.

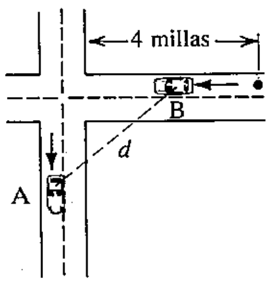


FIGURA 60

62. Los extremos de un abrevadero de 12 pies de largo forman triángulos isósceles. Los lados iguales de los triángulos tienen 4 pies de largo, y el lado resultante tiene x pies de largo (véase figura 61). Exprese el volumen V del abrevadero como una función de x.

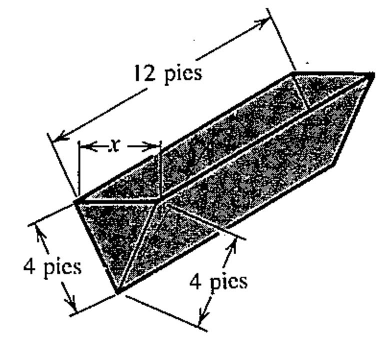


FIGURA 61

63. Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como lo muestra la figura 62. El radio de cada segmento semicircular es r. La longitud de la pista debe ser 1 km. Exprese el área A cubierta por la pista como una función de r.

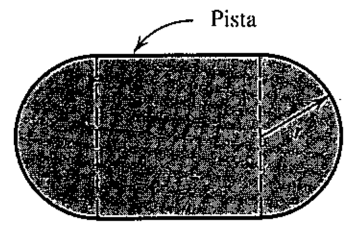


FIGURA 62

3.5 Gráficas de funciones

A menudo se utiliza una función para describir problemas o fenómenos en campos tales como el de la ciencia, la ingeniería y el comercio. Para interpretar y utilizar datos obtenidos de tal función, encontramos que es útil presentar los datos en forma de gráfica (véase figura 63)

En un plano xy, se define la **gráfica de una función** $y = f(x)$ como la gráfica de la relación

$$\{(x, y) | y = f(x),\ x \text{ en el dominio de } f\}.$$

En otras palabras, la gráfica de una función f es el conjunto de puntos (x, y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen $y = f(x)$.

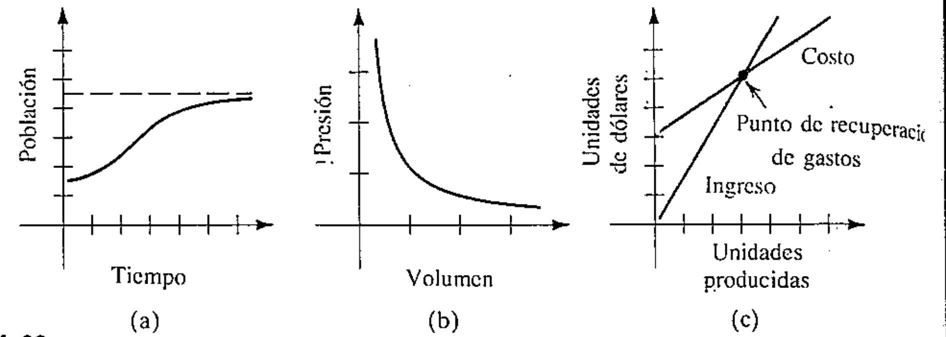


FIGURA 63

EJEMPLO 1

La gráfica de la función f definida por la tabla adjunta consta de cuatro puntos mostrados en la figura 64.

x	y
1 → 3	
3 → 5	
6 → 7	
8 ↗	

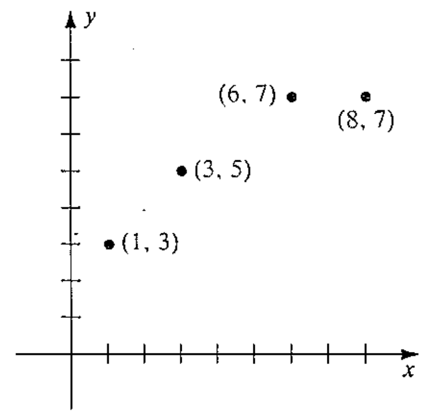


FIGURA 64

INTERSECTOS

Para graficar una función definida por la ecuación $y = f(x)$, usualmente es buena idea determinar primero si la gráfica de f tiene algunos intersectos. Recuerde que el eje y es la recta $x = 0$. Por tanto, si 0 está en el dominio de f, el **intersecto en y** de su gráfica es el número $f(0)$. (Véase figura 65(a)). De la misma manera, el eje x es la recta $y = 0$. Por tanto, para hallar los **intersectos en x** de la gráfica de $y = f(x)$, debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$. Los números que satisfacen esta ecuación se llaman también *ceros* de f. Los ceros *reales* de f son los intersectos en x de su gráfica. En la figura 65(b), vemos que $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0)$, $f(x_3) = 0$. Por tanto, x_1, x_2, y x_3 son los intersectos en x de la gráfica de la función f.

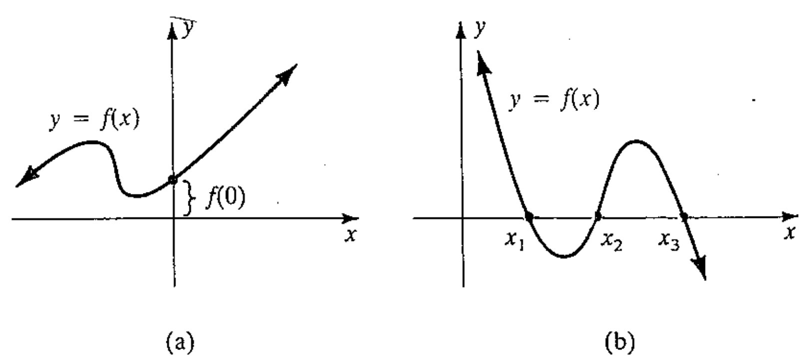


FIGURA 65

Para obtener otros puntos de la gráfica de una función $y = f(x)$, podemos escoger los números $x_1, y_2, \ldots, x_n$ en su dominio, calcular $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, y luego marcar los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Tenga presente que un valor funcional $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x (véase figura 66).

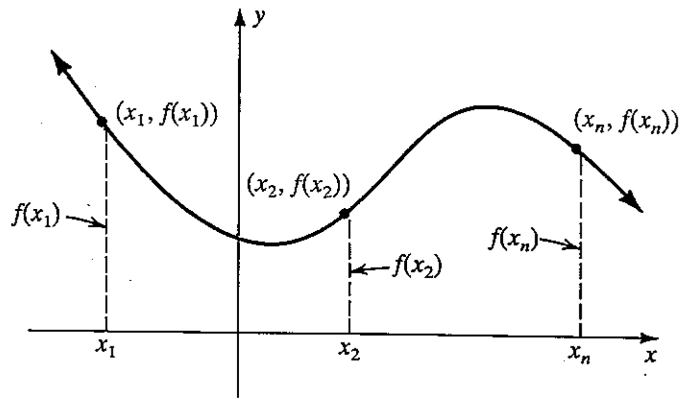


FIGURA 66

EJEMPLO 2

Grafique la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución. El intersecto en y es $f(0) = -3$. Para hallar los intersectos en x, resolvemos

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

o

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Por tanto, puesto que $f(x) = 0$ cuando $x = -1$ o $x = 3$, los intersectos en x son -1 y 3. Marcando los puntos de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica en la figura 67.

x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

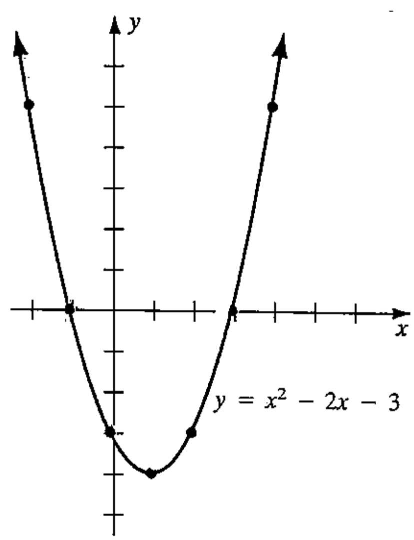


FIGURA 67

Si la gráfica de una función $y = f(x)$ se dibuja con precisión, usualmente es posible ver el dominio y el rango de f (figura 68). El dominio de f es cualquier intervalo u otro conjunto de números reales en el eje x; y el rango de f es cualquier intervalo u otro conjunto de números reales, en el eje y. En el ejemplo 2, el dominio de la función dada es el conjunto R de números reales; esto es, el intervalo $(-\infty, \infty)$. El rango de la función parece ser, según la gráfica de la figura 67, $[-4, \infty)$.

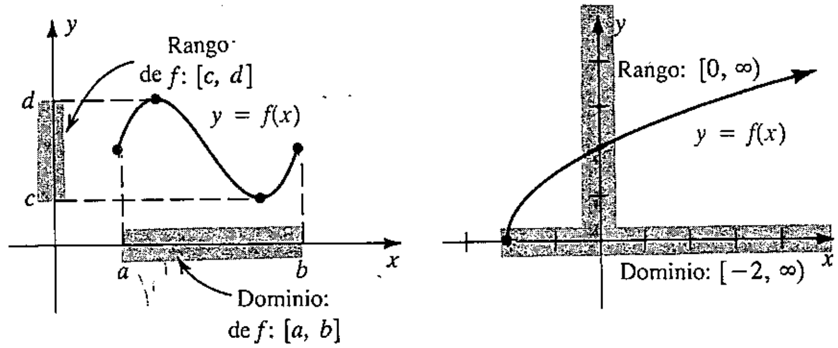


FIGURA 68 (a) (b)

PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Por la definición de una función sabemos que por cada x en el dominio de f corresponde un valor *único* $f(x)$ en el rango. Esto significa que cualquier recta vertical que interseque la gráfica de f puede hacerlo máximo en un punto. Y, viceversa, si cada recta vertical interseca la gráfica de una relación en a lo sumo un punto, entonces la relación es una función. Esta última afirmación se llama **prueba de la recta vertical** para una función.

EJEMPLO 3

(a) En la figura 69 vemos que cualquier recta vertical interseca la gráfica de la relación definida por $y = x^2$, en máximo un punto. Por tanto, por medio de la prueba de la recta vertical, la relación determina una función $y = f(x) = x^2$.

(b) Como lo muestra la figura 70, una recta vertical puede intersecar la gráfica de la relación determinada por $x^2 + y^2 = 4$ en más de un punto. Por tanto, la relación no determina una función $y = f(x)$.

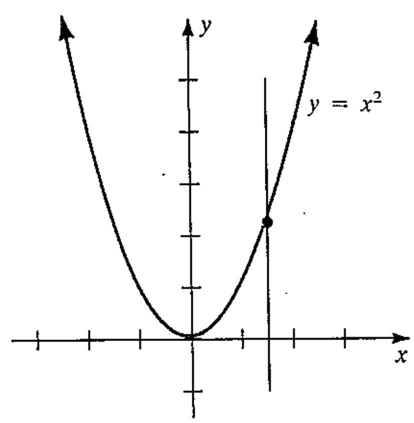


FIGURA 69

Gráfica de una función

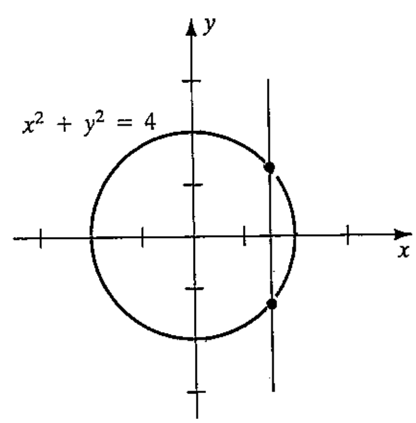


FIGURA 70

No es la gráfica de una función

FUNCIONES LINEALES

Uno de los más simples pero más importantes tipos de funciones es la función lineal. Cualquier función de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \tag{15}$$

donde a y b son constantes, se denomina **función lineal**. Puesto que $f(x)$ es un número real para cualquier opción de x, concluimos que el dominio de (15) es el conjunto de números reales. Si escribimos (15) de la forma $y = ax + b$, reconocemos, por (10) de la sección 3.3, la ecuación de una línea recta con pendiente a e intersecto b en y.

EJEMPLO 4

Grafique la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución. El intersecto en y de la gráfica es $b = -\frac{3}{2}$; esto es $f(0) = -\frac{3}{2}$. Recuerde que para graficar una línea recta, sólo necesitamos dos puntos. A pesar de que podríamos sustituir cualquier valor de x en $f(x)$ para obtener otro punto, determinaremos el intersecto en x de la gráfica. Estableciendo que $f(x) = 0$, tenemos

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

lo cual da $x = 3$. Por tanto, el intersecto en x es 3. La gráfica de la recta en la figura 71 se traza pasando por los puntos $(0, -\frac{3}{2})$ y $(3, 0)$.

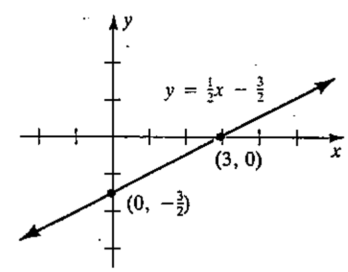


FIGURA 71

EJEMPLO 5

Grafique la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Solución. Esta función se determina en tres partes. Dibujamos, a su vez,

la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,

el punto $(0, 0)$ y,

la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica de f se muestra en la figura 72.

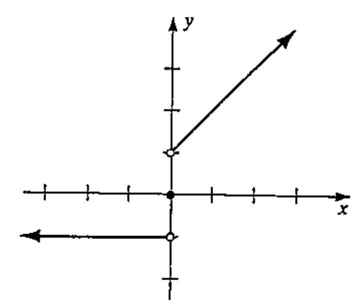


FIGURA 72

EJEMPLO 6

Grafique la función de valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solución. Utilizando la definición de valor absoluto dada en la sección 1.2, podemos reescribir f como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, la gráfica de f consta de dos partes. Dibujamos, a su vez, la recta $y = x$ para $x \geq 0$ y la recta $y = -x$ para $x < 0$. La gráfica se muestra en la figura 73.

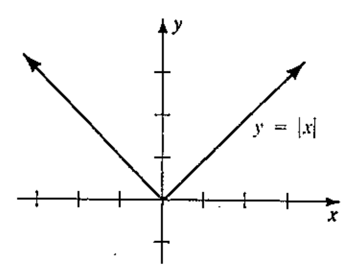
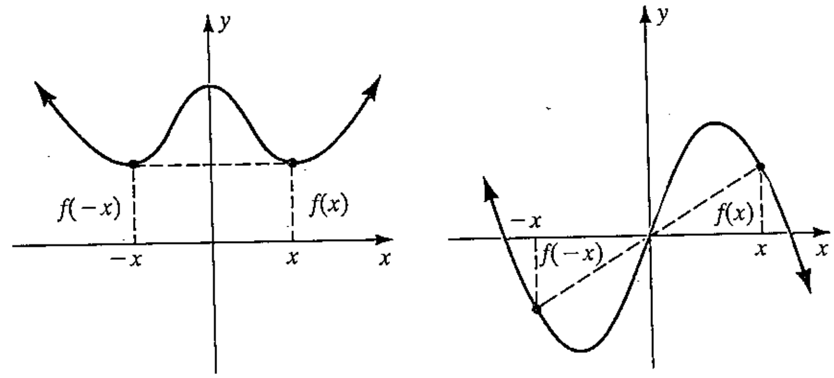


FIGURA 73

SIMETRIA

En la sección 3.1 tratamos la simetría de una gráfica con respecto al eje y, al eje x y al origen. La gráfica de una función puede ser simétrica con respecto al eje y o al origen, pero la gráfica de una función diferente de la función cero *no puede* ser simétrica con respecto al eje x. (¿Por qué no?). Si la gráfica de una función f es simétrica con respecto al eje y, decimos que f es una **función par.** Se dice que una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen es una **función impar.** Para las funciones, las siguientes pruebas de simetría son equivalentes a las pruebas (i) y (iii), respectivamente, de la p. 125 (véase figura 74).



(a) Función par $f(-x) = f(x)$ (b) Función impar $f(-x) = -f(x)$

FIGURA 74

Pruebas de simetría
La gráfica de una función f con dominio X es simétrica con respecto:
(i) al **eje** y si $f(-x) = f(x)$ para todos los x en X, y
(ii) al **origen** si $f(-x) = -f(x)$ para todos los x en X.

Una inspección a la figura 67 en el ejemplo 2 muestra que f no es ni par ni impar. Notamos también que $f(-x)$ no es igual ni a $f(x)$ ni a $f(-x)$. Por otra parte, en la figura 73 en el ejemplo 6, vemos que la función de valor absoluto es una función par, ya que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. En este caso, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

EJEMPLO 7

Grafique la función $f(x) = x^3$.

Solución. Puesto que $f(0) = 0$ y ya que $f(x) = x^3 = 0$ implica que $x = 0$, vemos que los intersectos en x y en y son los mismos, es decir, 0. Esto significa que la gráfica de f pasa por el origen. Además,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= -x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

muestra que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen. Por tanto, f es una función impar. Utilizando estos resultados sobre los intersectos y la simetría y marcando los puntos de la tabla adjunta nos da la gráfica en la figura 75

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8

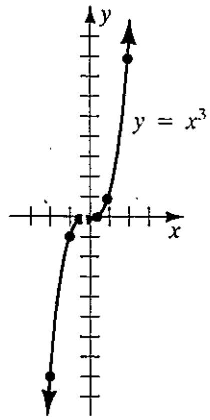


FIGURA 75

EJEMPLO 8

Grafique la función $f(x) = x^{2/3}$.

Solución. Podemos ver que la función puede escribirse también de la forma

$$f(x) = (x^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{x})^2$$

Puesto que es posible hallar la raíz cúbica de cualquier número real, el dominio de f es el conjunto R de números reales. Como en el ejemplo 7, los intersectos en x y en y son 0. Ahora, en

$$\begin{aligned} f(-x) &= (\sqrt[3]{-x})^2 \\ &= (-\sqrt[3]{x})^2 \\ &= (\sqrt[3]{x})^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

vemos que f es una función par. Marcando los puntos de la tabla y utilizando los intersectos y la simetría con respecto al eje y, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 76.

x	$f(x)$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	1
4	$4^{2/3} \approx 2.52$
8	4

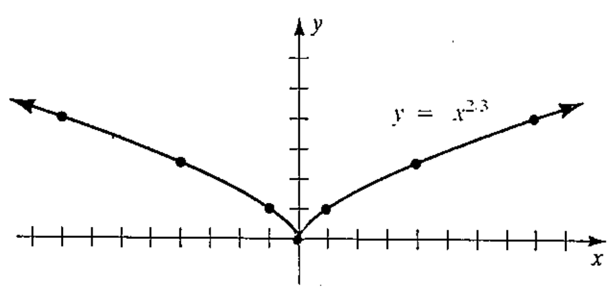


FIGURA 76

EJERCICIO 3.5

En los problemas 1 al 40, grafique la función dada y halle los intersectos. Utilice la simetría cuando sea posible.

1. $f(x)=2$
2. $f(x)=-2$
3. $f(x)=x$
4. $f(x)=x-5$
5. $f(x)=3x-1$
6. $f(x)=-2x+6$
7. $f(x)=\sqrt{x}$
8. $f(x)=-3+\sqrt{x}$
9. $f(x)=\sqrt{x-4}$
10. $f(x)=\sqrt{8-4x}$
11. $f(x)=x^{1/3}$
12. $f(x)=\sqrt[3]{x-27}$
13. $f(x)=-x^2$
14. $f(x)=10x^2$
15. $f(x)=x^2+1$
16. $f(x)=9-x^2$
17. $f(x)=2x^2-4x$
18. $f(x)=x^2+x$
19. $f(x)=x^2-8x+16$
20. $f(x)=x^2-4x+5$
21. $f(x)=-x^3$
22. $f(x)=-1+x^3$
23. $f(x)=x^3+1$
24. $f(x)=x^3-x$
25. $f(x)=\begin{cases}4, x\geq 3\\ -1\ x<3\end{cases}$
26. $f(x)=\begin{cases}x, -3\leq x\leq 3\\ -3, x<-3\end{cases}$
27. $f(x)=\begin{cases}x+1, x\leq 0\\ x-1, x>0\end{cases}$
28. $f(x)=\begin{cases}x, x<0\\ x^2, 0\leq x<1\\ x^3, x>1\end{cases}$
29. $f(x)=|x|-2$
30. $f(x)=|x-5|$
31. $f(x)=|x+2|$
32. $f(x)=|x|+2$
33. $f(x)=-2/|x|$
34. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$
35. $f(x)=1/x$
36. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
37. $f(x)=x^4$
38. $f(x)=(x-2)^4$
39. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
40. $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

En los problemas 41 al 46, halle los intersectos de la gráfica de la función dada.

41. $f(x)=(x-1)^2-36$
42. $f(x)=x^4-9$
43. $f(x)=\sqrt{(2-x^2)/(1-x)}$
44. $f(x)=\dfrac{3x^2-8x+6}{5x-10}$
45. $f(x)=\dfrac{4x-6}{x}$
46. $f(x)=\dfrac{25}{x^2+6}$

En los problemas 47 al 54, determine si la gráfica dada es la gráfica de una función.

47.

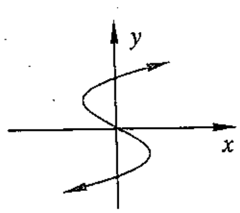


FIGURA 77

48.

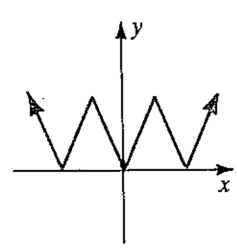


FIGURA 78

49.

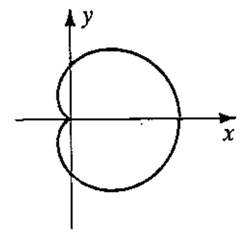


FIGURA 79

50.

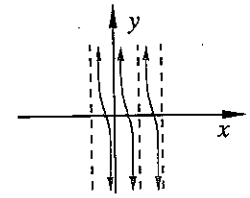


FIGURA 80

51.

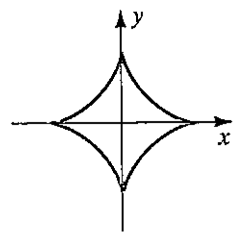


FIGURA 81

52.

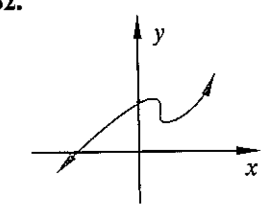


FIGURA 82

53.

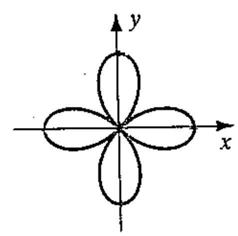


FIGURA 83

54.

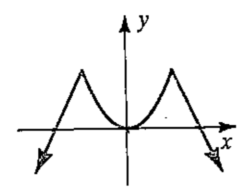


FIGURA 84

En los problemas 55 al 58, la gráfica dada es la gráfica de una función *f*. Según la figura, determine el dominio y el rango de *f*.

55.

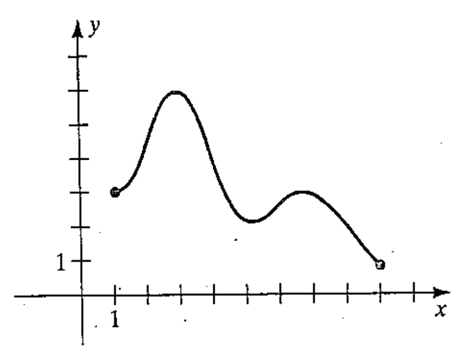


FIGURA 85

56.

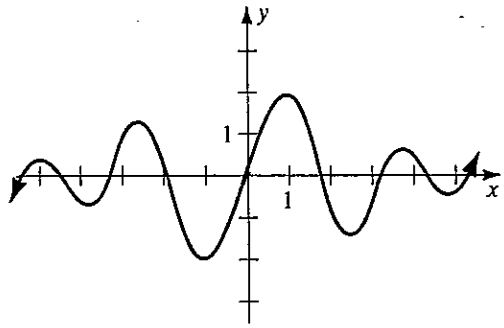


FIGURA 86

57.

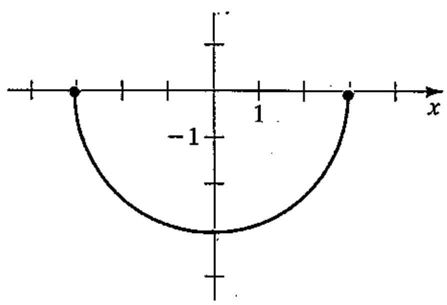


FIGURA 87

58.

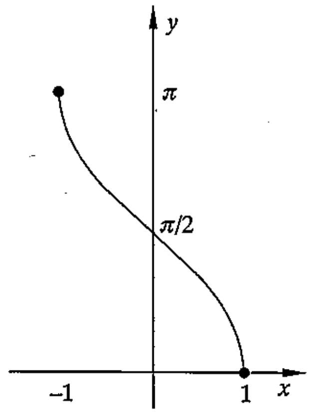


FIGURA 88

En los problemas 59 y 60, complete la gráfica (a) si f es una función par; (b) si f es una función impar.

59.

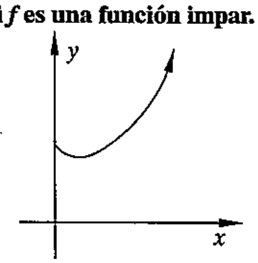


FIGURA 89

60.

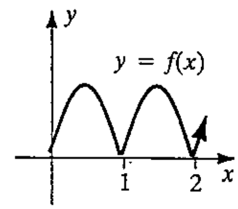


FIGURA 90

61. El resultado de la función **parte entera** $f(x) = [\,x\,]$ se define como el mayor entero n, para el cual $n \leq x$. Halle $f(-2.5), f(-2), f(-1.3), f(0), f(3.30), f(2.1)$ y $f(1.8)$.

62. Trace la gráfica de la función parte entera del problema 61.

63. Sea $f(x) = [\,x\,]$ la función parte entera definida en el problema 61; trace la gráfica de $y = [x + 2]$.

64. Un metro tiene aproximadamente 3.28 pies. Determine funciones para convertir metros a pies y pies a metros.

65. La *depreciación directa, o lineal,* supone que un artículo pierde todo su valor inicial de A dólares durante un periodo de n años en una cantidad A/n cada año. Si un artículo que cuesta US\$25,000 cuando está nuevo es depreciado linealmente por un periodo de 20 años, determine una función lineal dando su valor V en dólares después de x años $(0 \leq x \leq 20)$. ¿Cuál es el valor después de 10 años?

66. En cálculos de *interés simple,* la cantidad devengada S es una función lineal de tiempo medido en años: $S = P + Prt$. Calcule S pasados 12 años, si el capital es $P = 150$ y la tasa anual de interés es $r = 6\%$. ¿En qué momento es $S = 180$?

67. El valor en dólares de un computador está dado por la función lineal

$$V(x) = 500{,}000\,(1 - x/40),\ 0 \leq x40$$

en donde x se mide en años. ¿Cuál es el valor inicial del computador? ¿En qué momento el valor del computador es la mitad de su valor inicial? ¿En qué momento el computador ha perdido tres cuartas parte de su valor inicial? ¿Cuándo no vale nada?

68. La relación entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es una función lineal. Exprese T_C como una función de T_F si (32°F, 0°C) y (212°F, 100°C) son puntos de la gráfica de T_C. ¿Qué es $T_C(160)$?

69. La relación entre grados Kelvin T_K y grados Celsius T_C es una función lineal. Exprese T_K como una función de T_C si (27°C, 300°K) y (40°C, 313°K) son puntos de la gráfica de T_K. Se define cero absoluto como 0°K. ¿Qué es cero absoluto en la escala Celsius? ¿En la escala Fahrenheit?

3.6 Operaciones con funciones

Las funciones pueden combinarse a través de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división para producir nuevas funciones. Para dos funciones f y g, la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se define como sigue.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0)$$

DOMINIOS

El dominio de cada una de las funciones $f + g, f - g, fg$, y f/g es la *intersección* del dominio de f con el dominio de g. En el caso del cociente f/g, debemos excluir, además, los valores de x para los cuales el denominador $g(x)$ es 0.

EJEMPLO 1

Para $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$, tenemos

$$(f+g)(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9$$
$$(f-g)(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9$$
$$(fg)(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x$$

y $$(f/g)(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$$

En el ejemplo 1 notamos que $x = 3$ y $x = -3$ no están en el dominio de $(f/g)(x)$.

EJEMPLO 2

Si sumamos

$$f(x) = \sqrt{1-x}, \quad x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$$

obtenemos

$$(f+g)(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$$

El dominio de esta nueva función es el intervalo $[-2, 1]$, el cual es el conjunto de números comunes a ambos dominios.

SUMA DE COORDENADAS *y*

La gráfica de la suma de dos funciones f y g que tienen el mismo dominio puede obtenerse por medio de la **suma de coordenadas** y. Puesto que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, vemos en la figura 91 que la coordenada y de un punto (x_1, y_1), en la gráfica de $f + g$ es simplemente la suma de las coordenadas y de los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_1, g(x_1))$ en las gráficas de f y g, respectivamente.

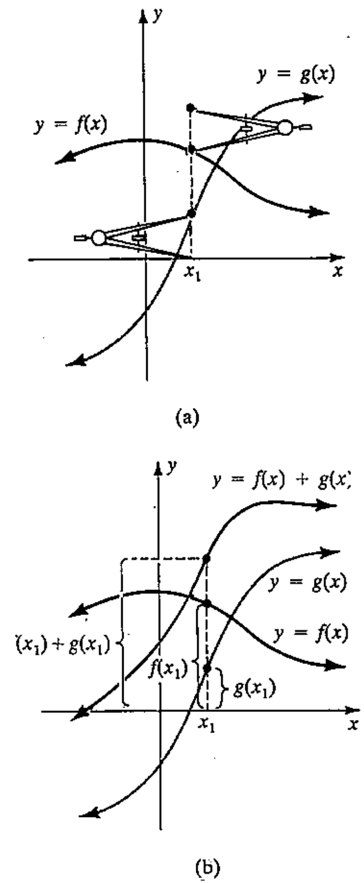


FIGURA 91

EJEMPLO 3

Si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, grafique $(f + g)(x)$

Solución. Primero, notamos que el dominio de

$$(f + g)(x) = x + \sqrt{x}$$

es $[0, \infty)$. La figura 92(a) muestra las gráficas de f y g para $x \geq 0$. Como se indicó, en cualquier valor dado de x podemos obtener la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $f + g$, sumando y_1 y y_2. La gráfica de la suma se muestra en la figura 92(b).

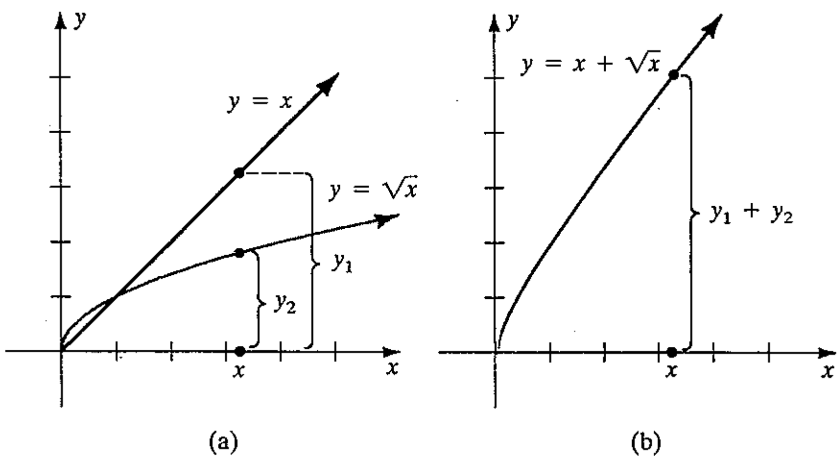


FIGURA 92

COMPOSICION DE FUNCIONES

Otro método de combinar dos funciones f y g se llama **composición de funciones.** Definimos la composición de f y g denotada por $f \circ g$ como la función

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

donde se entiende que los valores funcionales $g(x)$ esto es, elementos en el rango de g están en el dominio de f. Simbólicamente, utilizando nuestra analogía de la máquina de funciones, podemos representar la composición de f y g, como se muestra en la figura 93.

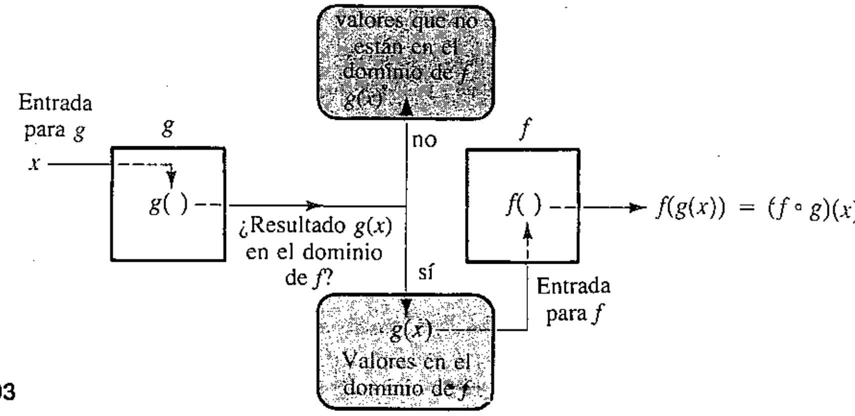


FIGURA 93

De la misma manera, la composición de g y f está definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Por supuesto, los valores funcionales $f(x)$ deben estar en el dominio de g. Las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ se llaman **funciones compuestas.**

EJEMPLO 4

Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encontrar $(f \circ g)(x)$.

Solución. Para enfatizar, escribimos f de la forma

$$f(\quad) = (\quad)^2 + 3(\quad) - 1$$

Por tanto, para calcular $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, podemos sustituir $g(x)$ en cada serie de paréntesis. Encontramos que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) - 1\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 6x^2 + 3 - 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 3\end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Halle $(g \circ f)(x)$ para las funciones dadas en el ejemplo 4.

Solución. En este caso,

$$g(\quad) = 2(\quad)^2 + 1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1)\\ &= 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 1\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 3\end{aligned}$$

Nota de advertencia: los ejemplos 4 y 5 ilustran que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$.

EJEMPLO 6

Exprese la función $F(x) = \sqrt{6x^2+1}$ como la composición $f \circ g$ de dos funciones f y g.

Solución. Si definimos las funciones f y g por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 6x^2 + 1$$

entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= (f \circ g)(x) \\ &= f(g(x)) \\ &= f(6x^2 + 1) \\ &= \sqrt{6x^2 + 1} \end{aligned}$$

Hay otras soluciones para el ejemplo 6: si las funciones f y g están determinadas por

$$f(x) = \sqrt{6x + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

entonces observe que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(x^2) \\ &= \sqrt{6x^2 + 1} = F(x) \end{aligned}$$

DOMINIO DE LA COMPOSICION

Como se indicó en la figura 93, el dominio de la función compuesta $f \circ g$ está dado por los valores de x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f. Por supuesto, esto no excluye la posibilidad de que el dominio de $f \circ g$ pueda ser todo el dominio de g.

EJEMPLO 7

Los dominios de $f(x) = x^2 - (3/x)$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son $\{x|x \neq 0\}$ y $\{x|x \geq 0\}$, respectivamente. El dominio de

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} \\ &= x - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

es $\{x|x > 0\}$, o $(0, \infty)$.

EJEMPLO 8

Los dominios de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 2$ son $\{x|x \geq 3\}$ y el conjunto R de números reales, respectivamente. Vemos que $g(x) \geq 2$ para todos los x. Para garantizar que los números representados por $g(x)$ estén en el dominio de f (a saber, aquellos números mayores o iguales a 3), debemos restringir el dominio de g de modo que $x \leq -1$ o $x \geq 1$ (véase figura 94.) Por tanto,

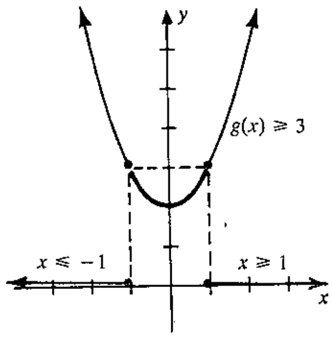


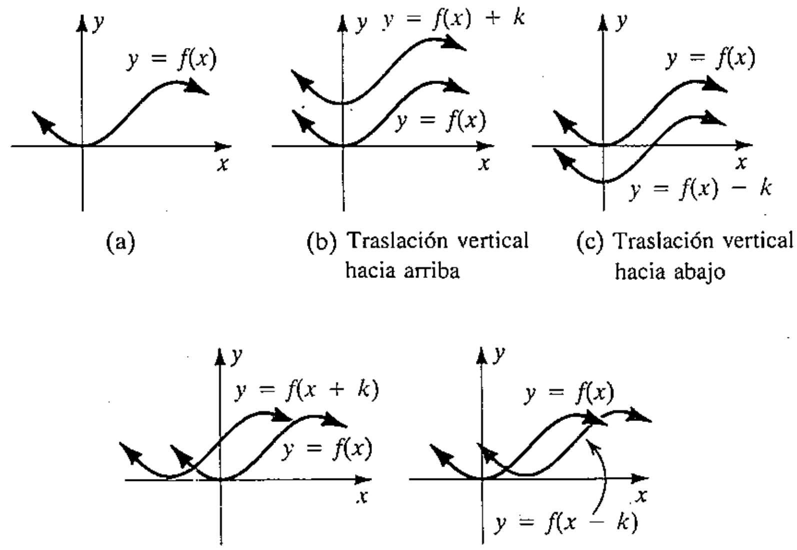
FIGURA 94

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2)$$
$$= \sqrt{(x^2 + 2) - 3}$$
$$= \sqrt{x^2 - 1}$$

se define solamente en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

GRAFICAS TRASLADADAS

Si f es una función y k es una constante positiva, entonces las gráficas de la suma $f(x) + k$, la diferencia $f(x) - k$, y las composiciones $f(x + k)$ y $f(x - k)$ pueden obtenerse de la gráfica de f, por medio de un **cambio o traslación** vertical u horizontal, por medio de una cantidad k. La figura 95 ilustra los 4 casos que se sintetizan en la tabla contigua.



(a) (b) Traslación vertical hacia arriba (c) Traslación vertical hacia abajo

(d) Traslación horizontal hacia la izquierda (e) Traslación horizontal hacia la derecha

FIGURA 95

FUNCION $k > 0$	GRAFICA DE $y = f(x)$
$y = f(x) + k$	Trasladada hacia *arriba* k unidades
$y = f(x) - k$	Trasladada hacia *abajo* k unidades
$y = f(x + k)$	Trasladada hacia la *izquierda* k unidades
$y = f(x - k)$	Trasladada hacia la *derecha* k unidades

EJEMPLO 9

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, que se muestra en la figura 96(a), se dio primero en el ejemplo 6 de la sección 3.1. Las gráficas de $y = \sqrt{x} + 1$, $y = \sqrt{x} - 1$, $y = \sqrt{x + 1}$, y $y = \sqrt{x - 1}$, que se muestran en las figuras 96(b), (c), (d) y (e), se obtuvieron de trasladar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, a su vez, una unidad arriba, una unidad abajo, una unidad a la izquierda y una a la derecha.

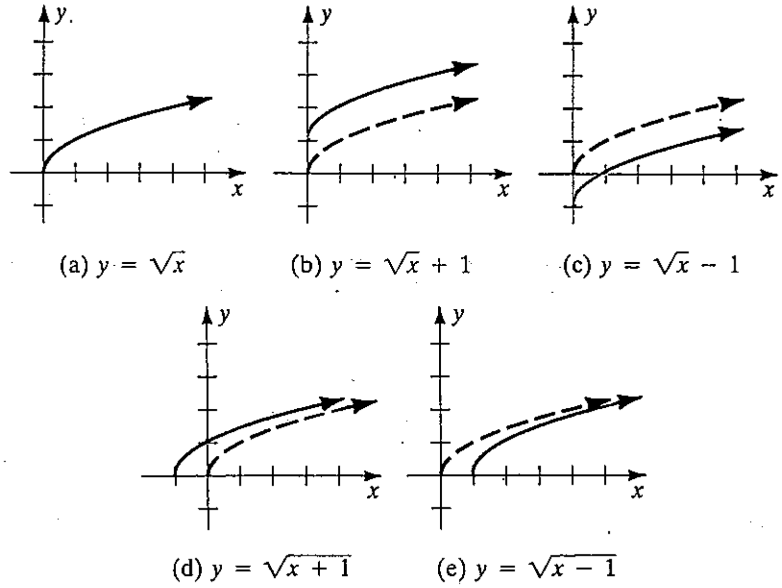


FIGURA 96

En general, la gráfica de

$$y = f(x \pm k_1) \pm k_2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0$$

puede hallarse en la gráfica de la función $y = f(x)$ combinando una traslación horizontal y una vertical. Por ejemplo, la gráfica de $y = f(x + k_1) - k_2$ es la gráfica de $y = f(x)$ trasladada horizontalmente k_1 unidades a la izquierda y luego trasladada verticalmente k_2 unidades hacia abajo.

EJEMPLO 10

Grafique $y = \sqrt{x - 3} + 4$.

Solución. La gráfica de $y = \sqrt{x - 3} + 4$ es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ trasladada 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba. La gráfica se da en la figura 97.

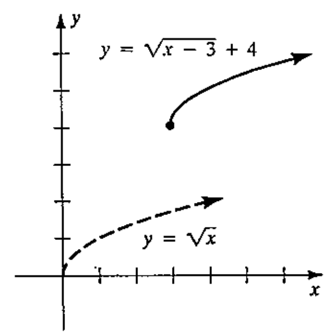


FIGURA 97

REFLEXIONES

La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje x. En otras palabras, para graficar $y = -f(x)$, simplemente volteamos la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 11

Grafique $y = -\sqrt{x}$.

Solución. La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, representada como una curva con líneas interrumpidas en la figura 98, se refleja en el eje x lo que da como resultado la curva.

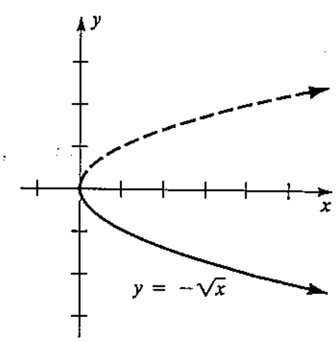


FIGURA 98

EJERCICIO 3.6

En los problemas 1 al 8, halle las funciones indicadas y dé sus dominios.

1. $f(x)=3x^2-2x+4,\ g(x)=x^2-1;\ f+g,\ fg$
2. $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x-1};\ fg,\ f/g$
3. $f(x)=3x+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}},\ g(x)=3x-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}};\ f+g,\ fg$
4. $f(x)=3x^3-4x^2+5x-6,\ g(x)=(1-x)^5;\ f+g,\ f/g$
5. $f(x)=x^2-9,\ g(x)=x-3;\ fg,\ f/g$
6. $f(x)=(3x+2)^{1/2},\ g(x)=(3x+2)+(3x+2)^{1/2};\ f-g,\ fg$
7. $f(x)=\sqrt{1-x},\ g(x)=\sqrt{x+2};\ f+g,\ fg$
8. $f(x)=2\sqrt{1-x}+1,\ g(x)=\sqrt{1-9x^2}-2;\ f-g,\ f/g$

En los problemas 9 al 12, utilice la suma de las coordenadas *y* para graficar la función *f+g*.

9. $f(x)=x,\ g(x)=|x|$ 10. $f(x)=|x|,\ g(x)=1/x$

11. $f(x)=x^2,\ g(x)=2x$ 12 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x+3 & \text{si } -2\le x\le 0\end{cases}$

En los problemas 13 y 14, utilice las gráficas de $y=f(x)$ y $y=g(x)$ dadas para graficar $y=f(x)+g(x)$.

13.

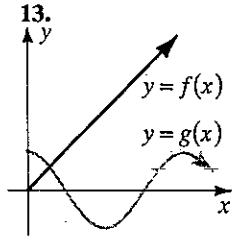


FIGURA 99

14.

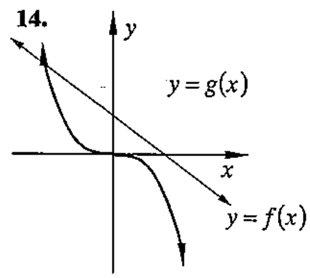


FIGURA 100

En los problemas 15 al 24, halle $f\circ g$ y $g\circ f$.

15. $f(x)=1+x^2;\ g(x)=\sqrt{x-1}$
16. $f(x)=x^2+x-5;\ g(x)=x-4$
17. $f(x)=\dfrac{2}{x-1};\ g(x)=x^2-1$ 18. $f(x)=\dfrac{x+1}{x};\ g(x)=1/x$
19. $f(x)=3x-1;\ g(x)=\dfrac{x+1}{3}$ 20. $f(x)=x-1;\ g(x)=x^3$
21. $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2};\ g(x)=-1/x$ 22. $f(x)=x-1;\ g(x)=x^2$
23. $f(x)=x-1;\ g(x)=x-\sqrt{x+1}$
24. $f(x)=x^3-4_2;\ g(x)=\sqrt{x+4}$

En los problemas 25 al 30, halle el dominio de $f\circ g$.

25. $f(x)=\sqrt{x+1};\ g(x)=2x+1$
26. $f(x)=x^2+2;\ g(x)=\sqrt{2x+3}$
27. $f(x)=1/x;\ g(x)=1/(x-6)$
28. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5};\ g(x)=3x$
29. $f(x)=\sqrt{x^2-1};\ g(x)=x+1$
30. $f(x)=\dfrac{x+1}{x};\ g(x)=\sqrt{x+3}$

En los problemas 31 al 34, halle $f\circ f$ y $f\circ(1/f)$.

31. $f(x)=6x-2$ 32. $f(x)=(x-2)^2-4x$
33. $f(x)=1/x^2$ 34. $f(x)=\dfrac{x+4}{x}$

En los problemas 35 al 38, exprese la función F como una composición $f\circ g$ de dos funciones f y g.

35. $f(x)=4x^2+1$ 36. $f(x)=5x^4-8x^2$
37. $f(x)=(x-3)^2+4\sqrt{x-3}$ 38. $f(x)=1-|9x+2|$

En los problemas 39 al 42, halle $(f\circ g\circ h)=f(g(h(x)))$ para las funciones dadas.

39. $f(x)=1/4(x^{-1}-1),\ g(x)=1/x^2,\ h(x)=2x+1$
40. $f(x)=\sqrt{3x-2},\ g(x)=x^2-1,\ h(x)=\sqrt{7x-5}$
41. $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^2,\ h(x)=x-1$
42. $f(x)=-x^2,\ g(x)=3x^2-x,\ h(x)=3x$

En los problemas 43 y 44, halle las gráficas de las funciones indicadas, trasladando la gráfica de la función dada.

43.

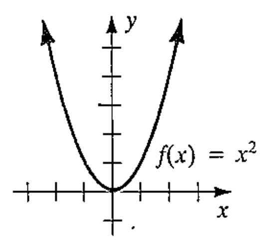


FIGURA 101

(a) $y=f(x)+1$
(b) $y=f(x)-1$
(c) $y=f(x+1)$
(d) $y=f(x-1)$

44.

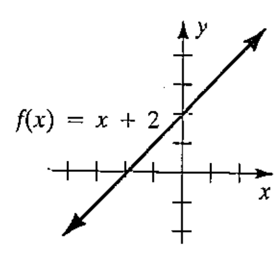


FIGURA 102

(a) $y=f(x)+2$
(b) $y=f(x)-3$
(c) $y=f(x+3)$
(d) $y=f(x)-4$

En los problemas 45 al 50, la gráfica dada es una gráfica trasladada de la función dada. Halle la ecuación de la gráfica.

45. $f(x)=-|x|$

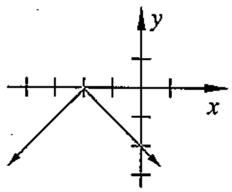


FIGURA 103

46. $f(x)=x^2-1$

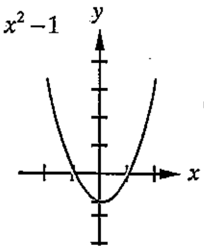


FIGURA 104

47. $f(x)=-x^2$

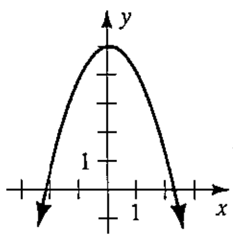


FIGURA 105

48. $f(x)=(2-x)^{1/2}$

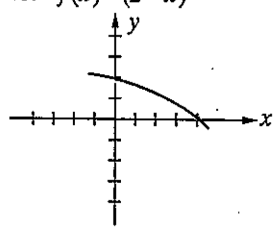


FIGURA 106

49. $f(x)=x^2$

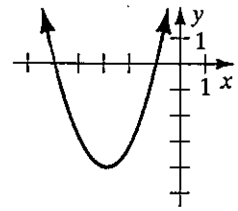


FIGURA 107

50. $f(x)=-|x|$

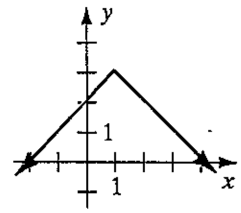


FIGURA 108

En los problemas 51 al 56, halle la gráfica de la función indicada, de la gráfica de *f*.

51. $f(x)=x^2,\ y=(x-2)^2+3$

52. $f(x)=\sqrt{x+1}-4,\ y=\sqrt{x}$

53. $f(x)=|x-4|+1,\ y=|x|$

54. $f(x)=x^3,\ y=(x-2)^3-2$

55. $f(x)=x^2-4,\ y=-(x^2-4)$

56. $f(x)=\sqrt{x-4},\ y=\sqrt{x}$

3.7 Funciones inversas

En esta sección trataremos la **inversa de una función.** Esta será una regla de correspondencia que "invierte" la función original. Por ejemplo, considere la función f determinada por la tabla (a). Invirtiendo las columnas, obtenemos la nueva regla de correspondencia dada en la tabla (b). Esta última regla, que es también una función, se denota como f^{-1}.

El símbolo f^{-1} se lee *"inversa de f"*. Es importante señalar que "-1" en f^{-1} *no* es un exponente; esto es,

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

sino que denota la *inversa de f*.

Ahora considere otra función f determinada por la tabla (c). Si invertimos los papeles de x y y en esta tabla, obtenemos la correspondencia dada en la tabla (d). Vemos que esta correspondencia no es una función, puesto que hay dos valores de y —a saber, los números 2 y 3— asociados con $x = 6$.

f:

x	y
1 → 3	
2 → 5	
3 → 2	

(a)

f^{-1}:

x	y
3 → 1	
5 → 2	
2 → 3	

(b)

f:

x	y
1 → 4	
2 → 6	
3 ↗	

(c)

x	y
4 → 1	
6 → 2	
↘ 3	

(d)

FUNCIONES UNO A UNO

Deseamos determinar qué propiedad debe tener una función para que la "regla de inversión" sea también una función. Note que en las tablas (a) y (b), cada elemento del rango está asociado con *sólo un* elemento del dominio, mientras que en las tablas (c) y (d), uno de los elementos del rango (a saber, 6) le correspondía a *más de un elemento* del dominio.

DEFINICION 3

> Se dice que una función f es una función **uno a uno** si y sólo si cada elemento del rango de f está asociado con exactamente un elemento de su dominio X.

Es precisamente esta propiedad la que se requiere para que la "regla de inversión" sea una función.

De la definición 3 se deduce que una función f *no* es uno a uno si se pueden encontrar diferentes elementos $x_1 \neq x_2$ en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

EJEMPLO 1

La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, ya que $-3 \neq 3$ y $f(-3) = f(3) = 9$. En otras palabras, la función f no es uno a uno porque el número 9 en su rango le corresponde dos números -3 y 3 en su dominio.

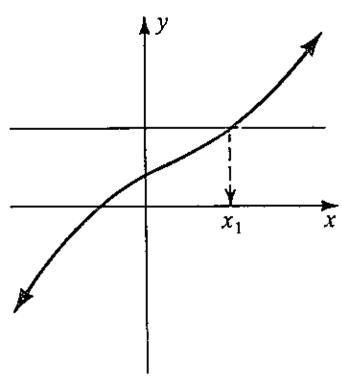
Antes de tratar de hallar la inversa de una función, debe determinar si la función dada es uno a uno. A pesar de que hay una serie de técnicas para hacerlo, trataremos a continuación sólo uno de tales métodos.

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

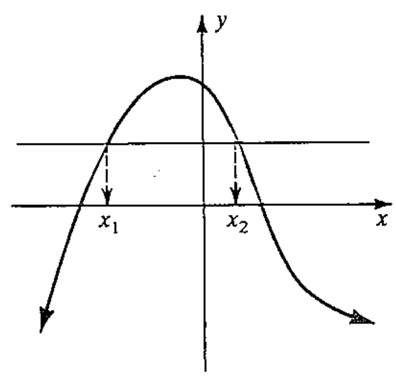
Sea $y = f(x)$ una función uno a uno, y considere su gráfica

$$\{(x, y) | y = f(x), \; x \text{ en el dominio } X \text{ de } f\}$$

Puesto que a cada valor de y le corresponde a lo más un valor de x, cualquier recta horizontal interseca la gráfica de $y = f(x)$ en a lo sumo un punto. Y, al contrario, si cada recta horizontal interseca la gráfica de una función en máximo un punto, entonces la función es uno a uno. La **prueba de la recta horizontal** se ilustra en la figura 109.



(a) f es uno a uno



(b) f no es uno a uno

FIGURA 109

EJEMPLO 2

Determine si la función $f(x) = x^2 - 2x$ es uno a uno.

Solución. En la figura 110 vemos que una recta horizontal interseca la gráfica de la función x en más de un punto. Se deduce, por la prueba de recta horizontal, que f no es uno a uno.

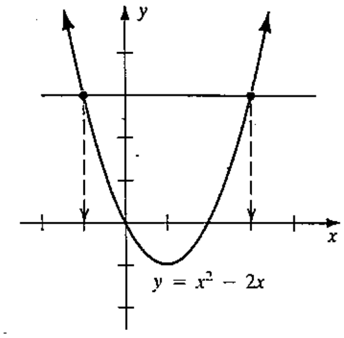


FIGURA 110

Suponga que f es una función uno a uno con dominio X y rango Y. Entonces, para un número x en X, $y = f(x)$ es un número en Y. No hay otro número x en X correspondiente a ese número y. Por tanto, la correspondencia inversa g de Y a X es una función que debe dar

$$g(f(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } X$$

Pero si $f(x) = y$ y $x = g(y)$, entonces debemos tener también

$$f(g(y)) = y \quad \text{para cada } y \text{ en } Y$$

Pero renombrando a y como x en el enunciado anterior, tenemos

$$f(g(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } Y$$

Sintetizamos este análisis con una definición de la inversa de una función f.

DEFINICION 4

Sea f una función uno a uno, con dominio X y rango Y. La **inversa de f** es una función g con dominio Y y rango X para la cual

$$f(g(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } Y$$
$$\text{y} \quad g(f(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } X \qquad \textbf{(16)}$$

También decimos que las funciones f y g son funciones inversas entre sí.

Como en el análisis que abrió esta sección, denotaremos la inversa de una función f uno a uno como f^{-1}. Por tanto, (16) es equivalente a

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \textbf{(17)}$$

Estas dos ecuaciones se interpretan en la figura 111. Observe que en la figura 111(a) x es un elemento en el rango Y, mientras que en la figura 111(b) x representa un elemento en el dominio X.

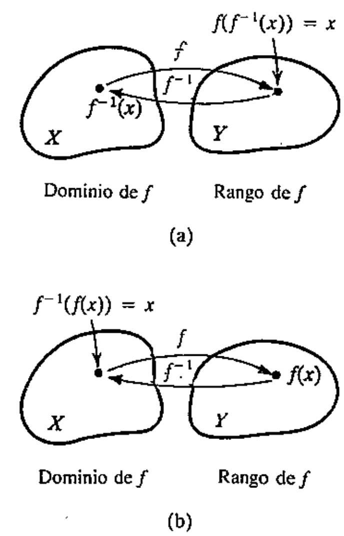


FIGURA 111

HALLAR f^{-1}

La primera de las ecuaciones en (17) es particularmente útil, ya que puede utilizarse para hallar f^{-1}. El método se sintetiza como sigue.

Hallar f^{-1}

Para hallar f^{-1} para una función uno a uno:

1. Desarrolle la composición de f y f^{-1}, esto es, $f(f^{-1}(x))$
2. Desarrolle la ecuación $f(f^{-1}(x)) = x$ y,
3. Resuelva la ecuación $f(f^{-1}(x)) = x$ para el símbolo $f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 3

Halle la inversa de la función $f(x) = 5x - 7$.

Solución. Puesto que la gráfica de $y = 5x - 7$ es una línea recta no horizontal, se deduce por la prueba de la recta horizontal que f es una función uno a uno. Para hallar f^{-1} primero reescribimos la función f como

$$f(\quad) = 5(\quad) - 7$$

de modo que

$$f(f^{-1}(x)) = 5f^{-1}(x) - 7$$

Ahora resolvemos la ecuación

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{o} \quad 5f^{-1}(x) - 7 = x$$

para $f^{-1}(x)$. El resultado es

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}$$

EJEMPLO 4

Halle la inversa de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^3 + 1}$$

Solución. Dejamos que usted verifique que f es una relación uno a uno.

Ya que

$$f(\quad) = \frac{2}{(\quad)^3 + 1}$$

se deduce que

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2}{(f^{-1}(x))^3 + 1}$$

La ecuación $f(f^{-1}(x)) = x$ es equivalente a

$$\frac{2}{(f^{-1}(x))^3 + 1} = x$$

o

$$\begin{aligned} 2 &= x[(f^{-1}(x))^3 + 1] \\ 2 &= x(f^{-1}(x))^3 + x \\ 2 - x &= x(f^{-1}(x))^3 \\ (f^{-1}(x))^3 &= \frac{2 - x}{x} \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2 - x}{x}}$$

METODO ALTERNATIVO DE HALLAR f^{-1}

La inversa de una función puede hallarse de una manera diferente de la que se mostró en los ejemplos 3 y 4. Si intercambiamos, o renombramos, las variables x y y en una función uno a uno $y = f(x)$, obtenemos entonces la ecuación $x = f(y)$. Esta ecuación determina la "regla de inversión" o función inversa. Para hallar f^{-1}, simplemente despejamos y en términos de x. Esto da la forma deseada $y = f^{-1}(x)$. El procedimiento se sintetiza como sigue.

Método alternativo de hallar f^{-1}

Para hallar f^{-1} para una función uno a uno f:

1. Intercambie las variables x y y en la ecuación $y = f(x)$, y
2. Resuelva la ecuación resultante $x = f(y)$ para y.

EJEMPLO 5

Halle la inversa de la función f en el ejemplo 3.

Solución. En el ejemplo 3 escribimos la función dada como

$$y = 5x - 7$$

Intercambiando las variables x y y, da

$$x = 5y - 7$$

Despejando y, da como resultado

$$y = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}, \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}$$

GRAFICA DE f^{-1}

Suponga que f es una función uno a uno y que (a, b) denota cualquier punto de la gráfica de f. Entonces, $f(a) = b$, y, según (17),

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

Esto significa que el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero puesto que los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$, concluimos que la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en la recta $y = x$ (véase figura 112).

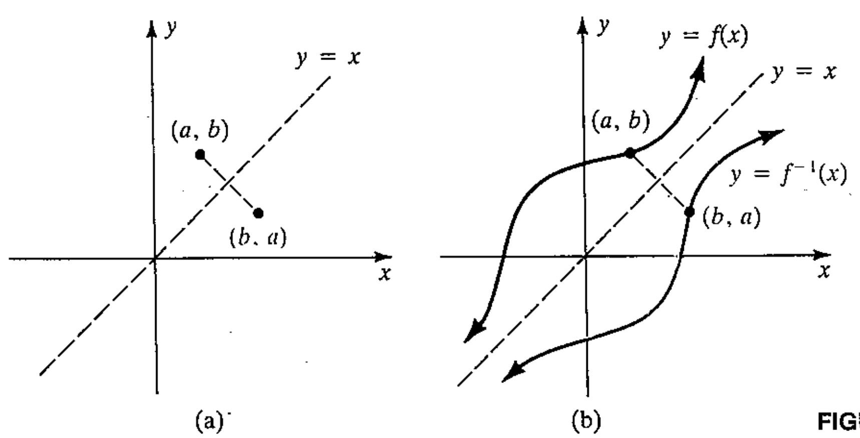


FIGURA 112

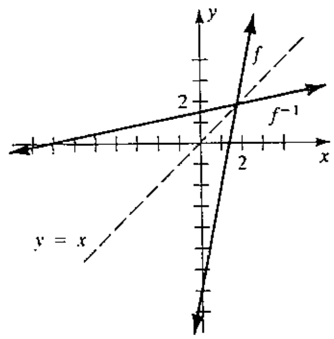


FIGURA 113

EJEMPLO 6

En el ejemplo 3 vimos que la inversa de

$$f(x) = 5x - 7 \quad \text{es} \quad f^{-1}(x) = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}.$$

Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la figura 113.

Para una función f que no sea uno a uno, puede ser posible determinar una nueva función F en una parte del dominio de f de modo que F sea uno a uno y tenga el mismo rango de f. Entonces, la función F determinada en el dominio restringido, tendrá una inversa.

EJEMPLO 7

En el ejemplo 1 vimos que $f(x) = x^2$ no es una función uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$. Ahora, definiendo $f(x) = x^2$ solamente en $[0, \infty)$, vemos en las figuras 114(a) y (b) que F es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. La gráfica de F^{-1} se muestra en la figura 114(c). Observe que f y F tienen el mismo rango.

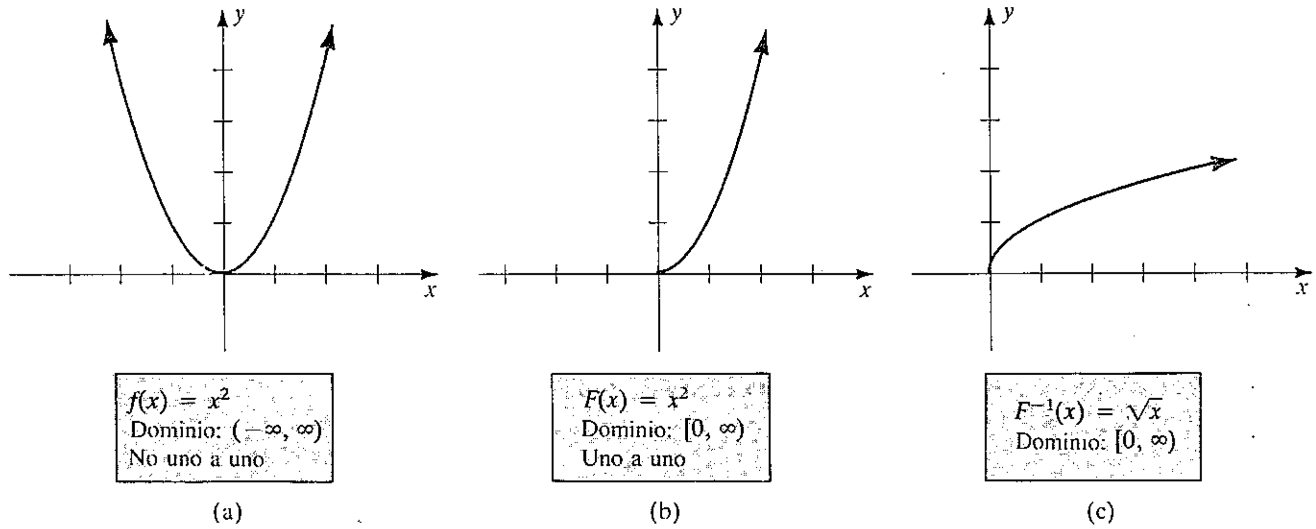


FIGURA 114

El concepto ilustrado en el ejemplo 7 se utilizará en la sección 7.9.

EJERCICIO 3.7

En los problemas 1 al 10, determine si la función dada es uno a uno, examinando su gráfica. Si f es uno a uno, halle f^{-1}.

1. $f(x)=3x$
2. $f(x)=3x-1$
3. $f(x)=x^3$
4. $f(x)=x^2-2$
5. $f(x)=x^4$
6. $f(x)=x^2+x-12$
7. $f(x)=2x^2-x$
8. $f(x)=2/x$
9. $f(x)=1/(x-3)$
10. $f(x)=x^2/(x^3-1)$

En los problemas 11 al 20, la función dada es uno a uno. Halle f^{-1}.

11. $f(x)=8-3x$
12. $f(x)=2x-1/2$
13. $f(x)=\dfrac{2x}{3+x}$
14. $f(x)=\dfrac{2x}{5x+8}$
15. $f(x)=\dfrac{1}{x}+4$
16. $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-3)}$
17. $f(x)=x^3-1$
18. $f(x)=2-x^3$
19. $f(x)=\sqrt{x}$
20. $f(x)=6\sqrt{x}-9$

En los problemas 21 al 24, verifique que las funciones dadas sean inversas entre sí.

21. $f(x)=3x-1/2,\ g(x)=x/3+1/6$

22. $f(x)=x^5+6,\ g(x)=\sqrt[5]{x-6}$

23. $f(x)=\dfrac{3-x}{2(5-x)},\ g(x)=\dfrac{3-10x}{1-2x}$

24. $f(x)=\dfrac{4x-1}{3x},\ g(x)=\dfrac{1}{4-3x}$

En los problemas 25 y 26, determine el dominio y el rango de f^{-1}, sin hallar la inversa.

25. $f(x)=\sqrt{x-3}$

26. $f(x)=3-\sqrt{2x}$

En los problemas 27 al 30, la función dada es uno a uno. Sin hallar f^{-1}, halle en el valor x indicado el punto correspondiente en la gráfica de f^{-1}.

27. $f(x)=8x-3;\ x=5$

28. $f(x)=2x^3+2x;\ x=2$

29. $f(x)=\sqrt{3x}+x;\ x=3$

30. $f(x)=\dfrac{x}{4x-1};\ x=1/4$

En los problemas 31 al 34, trace las gráficas de f y f^{-1}, utilizando los mismos ejes de coordenadas.

31. $f(x)=4x-2$

32. $f(x)=2x+2$

33. $f(x)=x^3$

34. $f(x)=\sqrt{x+2}-3$

En los problemas 35 y 36, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

35.

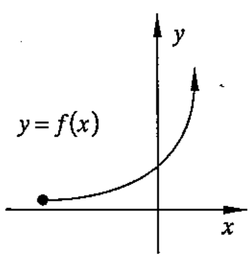


FIGURA 115

36.

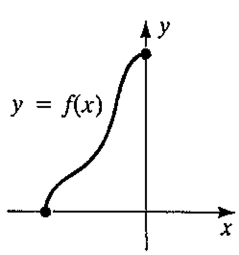


FIGURA 116

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}.

37.

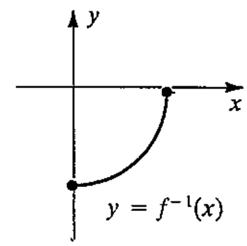


FIGURA 117

38.

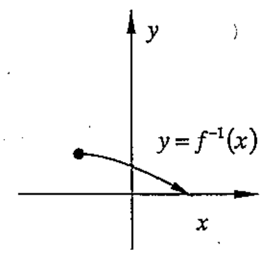


FIGURA 118

Una definición equivalente a la función uno a uno está dada por lo siguiente: La función f es uno a uno si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ para x_1 y x_2 en el dominio de f. En los problemas 39 al 44, utilice esta definición para verificar que la función sea uno a uno.

39. $f(x)=-2x+3$

40. $f(x)=\sqrt{x}$

41. $f(x)=3x-5$

42. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2}$

43. $f(x)=1/x$

44. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x},\ x>0$

En los problemas 45 al 48, verifique que la función dada sea su propia inversa.

45. $f(x)=-x$

46. $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$

47. $f(x)=1/x$

48. $f(x)=\sqrt{9-x^2},\ 0\le x\le 3$

En los problemas 49 y 50, la función f dada no es uno a uno. Halle F^{-1} para la función F y el dominio de F^{-1}.

49. $f(x)=(3-2x)^2, (-\infty,\infty)\quad F(x)=(3-2x)^2, [3/2,\infty)$

50. $f(x)=3x^2+2, (-\infty,\infty)\quad F(x)=3x^2+2, (0,\infty)$

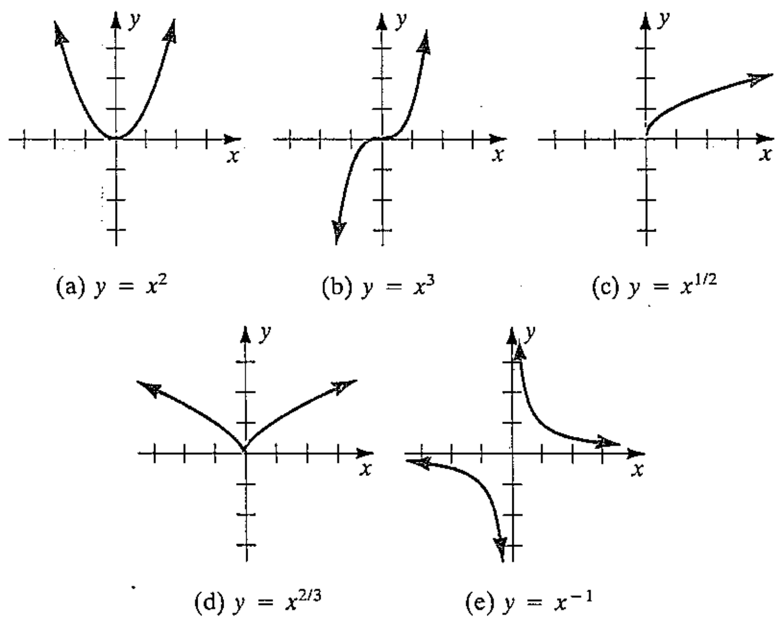
3.8 Variación

FUNCION POTENCIA

Una función de la forma

$$f(x) = kx^n, \quad k \text{ es una constante} \tag{18}$$

se llama **función potencia.** Las funciones potencia juegan un papel importante en muchas áreas de la ciencia. Puede probarse que (18) es una función para cualquier número real n; el dominio de f depende de n. La figura 119 ilustra varias funciones potencia con $k = 1$ que se dan comúnmente.



(a) $y = x^2$ (b) $y = x^3$ (c) $y = x^{1/2}$

(d) $y = x^{2/3}$ (e) $y = x^{-1}$

FIGURA 119

EJEMPLO 1

Grafique la función $f(x) = (x - 3)^{2/3}$

Solución. En el ejemplo 8 de la sección 3.5 graficamos la función potencia de $f(x) = x^{2/3}$. (Véase también figura 119(d)). La gráfica de $f(x) = (x - 3)^{2/3}$ es la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ trasladada 3 unidades a la derecha. El intersecto y de la gráfica es $f(0) = (-3)^{2/3} = 2.08$. (Véase figura 120).

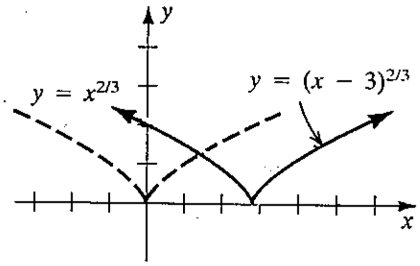


FIGURA 120

VARIACION DIRECTA E INVERSA

En las aplicaciones, una función potencia proviene de un concepto de variación. Si una variable y está dada por la fórmula

$$y = kx^n, \quad \text{donde } n > 0 \tag{19}$$

decimos que y varía directamente con la enésima potencia de x, o que y es **directamente proporcional** a x^n. Si y está dado por

$$y = \frac{k}{x^n} = kx^{-n}, \quad n > 0 \tag{20}$$

decimos que y **varía inversamente** con la enésima potencia de x, o que y es **inversamente proporcional** a x^n. En (19) y (20), k se llama **constante de proporcionalidad.**

EJEMPLO 2

Suponga que y es directamente proporcional a x^3. Si $y = 4$ cuando $x = 2$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 4$?

Solución. Según (19) podemos escribir

$$y = kx^3$$

Sustituyendo $y = 4$ y $x = 2$ en esta ecuación, obtenemos la constante de proporcionalidad k, puesto que

$$4 = k8 \quad \text{implica que} \quad k = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{2}x^3$. Finalmente, cuando $x = 4$, tenemos

$$y = \tfrac{1}{2}(4)^3, \quad \text{o} \quad y = 32$$

En física, la **ley de Hooke** afirma que la fuerza F requerida para mantener estirado un resorte x unidades por encima de su longitud natural (no estirado) es proporcional a la elongación x; esto es,

$$F = kx \tag{21}$$

(Véase figura 121).

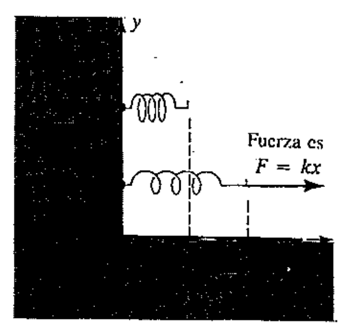


FIGURA 121

EJEMPLO 3

Un resorte cuya longitud natural es de $\frac{1}{4}$ de pie se estira 1 pulgada con una fuerza de 30 libras. ¿Qué fuerza se necesita para estirarlo a una longitud de 1 pie?

Solución. La elongación de 1 pulgada es equivalente a $\frac{1}{12}$ pies. Por tanto, según (21), tenemos

$$30 = k(\tfrac{1}{12}), \quad \text{o} \quad k = 360 \text{ lb/pie}$$

por tanto, $F = 360x$. Cuando el resorte se estira a una longitud de 1 pie, su elongación es $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ pies. Por tanto, con $x = \frac{3}{4}$, se deduce que

$$F = 360 \cdot \tfrac{3}{4} = 270 \text{ lb}$$

VARIACION CONJUNTA Y COMBINADA

Una variable puede ser directamente proporcional a los productos de potencias de varias variables. Si la variable z está dada por

$$z = kx^m y^n, \quad m > 0, \quad n > 0 \tag{22}$$

decimos que z **varía conjuntamente** con la potencia m de x y la potencia n de y, o que z es **conjuntamente proporcional** a x y y. El concepto de variación conjunta expresado en (22) puede, por supuesto, extenderse a productos de potencias de más de dos variables. A más de esto, una cantidad puede ser directamente proporcional a varias variables e inversamente proporcional a otras variables. Este tipo de variación se denomina **variación combinada.**

EJEMPLO 4

Considere el cilindro circular recto y el cono circular recto mostrados en la figura 122. El volumen V de cada uno es conjuntamente proporcional al cuadrado de su radio r y su altura h. Esto es,

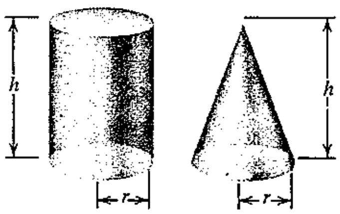


FIGURA 122

$$V_{\text{cilindro}} = k_1 r^2 h \quad \text{y} \quad V_{\text{cono}} = k_2 r^2 h$$

Se produce que $k_1 = \pi$ y $k_2 = \pi/3$. Por tanto, los volúmenes son

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \quad \text{y} \quad V_{\text{cono}} = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

EJEMPLO 5

La resistencia hidrodinámica D para un bote que se desliza a través del agua es conjuntamente proporcional a la densidad ρ del agua, el área A de la parte húmeda del casco del bote y al cuadrado de su velocidad v. Esto es,

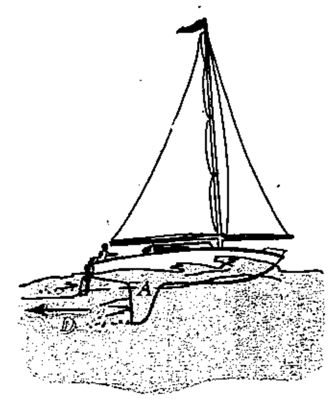


FIGURA 123

$$D = k\rho A v^2 \tag{23}$$

(Véase figura 123).

La misma relación (23) puede utilizarse algunas veces para determinar la *fuerza de arrastre* que actúa sobre un objeto que se mueve a través del aire.

EJEMPLO 6

La fórmula

$$z = k\frac{x^3 y^2}{\sqrt{w}}$$

ilustra la variación combinada; esto es, z varía conjuntamente con el cubo de x y el cuadrado de y e inversamente con la raíz cuadrada de w.

EJEMPLO 7

Suponga que las corrientes eléctricas I_1 e I_2 fluyen en cables paralelos largos, como lo muestra la figura 124. La fuerza F_L por longitud de unidad ejercida sobre un cable a causa del campo magnético alrededor del otro cable es conjuntamente proporcional a las corrientes I_1 e I_2, e inversamente proporcional a la distancia r entre los cables:

$$F_L = k\frac{I_1 I_2}{r}$$

Si las corrientes fluyen en la misma dirección, como se muestra en la figura, F_L es una fuerza atrayente. Cuando I_1 e I_2 se mueven en dirección opuesta, la fuerza F_L es una fuerza repulsiva.

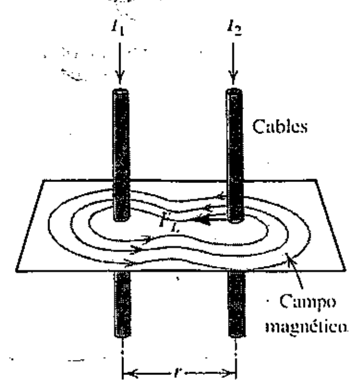


FIGURA 124

EJERCICIO 3.8

En los problemas 1 al 6, grafique la función potencia dada.

1. $f(x)=x^4$
2. $f(x)=-x^{-1}$
3. $f(x)=x^{2/3}$
4. $f(x)=x^{-3}$
5. $f(x)=-2x^{3/2}$
6. $f(x)=x^{-1/3}$

En los problemas 7 al 16, utilice las gráficas obtenidas en los problemas 1 al 6 para obtener la gráfica de la función dada.

7. $f(x)=x^4+2$
8. $f(x)=x^4-1$
9. $f(x)=-x^4/2$
10. $f(x)=(x-1)^4$
11. $f(x)=x^{2/3}+2$
12. $f(x)=(x-3)^{2/3}$
13. $f(x)=(x+1)^{-1/2}$
14. $f(x)=1-x^{-3}$
15. $f(x)=(x+1)^{-1}$
16. $f(x)=(x-3)^{-1}$

17. Estudios empíricos indican que el periodo de vida de un mamífero en cautiverio está relacionado con el tamaño del cuerpo por medio de la función potencia

$$L(M)=(11.8)M^{0.20}$$

donde L es el periodo de vida en años y M es la masa del cuerpo en kilogramos.

(a) ¿Qué predice esta función para el periodo de vida de un elefante de 4,100 kg en un zoológico?

(b) ¿Qué predice esta función para el periodo de vida de un hombre de 95 kg recluido en una prisión?

18. La velocidad del sonido en el aire varía con la temperatura según la función potencia

$$v(T) = 33{,}145\sqrt{T/273}$$

donde v es la velocidad del sonido en centímetros por segundo y T es la temperatura del aire en grados Kelvin (273° Kelvin = 0° Celsius). ¿En qué día viaja más rápidamente el sonido de los fuegos artificiales detonadores: 4 de julio (T = 310° K) o 1o. de enero (T = 270° K)? ¿Cuánto más rápidamente?

19. Suponga que y varía directamente con el cuadrado de x. Si $y = 8$ cuando $x = 2$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 3$?

20. Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x. Si $y = 72$ cuando $x = 6$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 8$?

21. Suponga que w es inversamente proporcional a la raíz cúbica de t. Si $w = 4$ cuando $t = 64$, ¿cuál es el valor de w cuando $t = 512$?

22. El tono de una cuerda vibrante de sección dada es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional a la longitud. Halle la razón entre el tono de una cuerda de 1.20 m de largo sometida a una tensión de 50 kg y el de una cuerda de 1.05 m de largo sometida a una tensión de 32 kg.

23. La distancia s que viaja una piedra cuando cae de un edificio muy alto es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t de viaje. Si la piedra cae 96 pies en 4 segundos, halle una fórmula que relacione s y t. ¿Hasta dónde cae la piedra en 6 segundos?

24. La velocidad v de una piedra lanzada desde un edificio muy alto varía directamente con el tiempo t de vuelo. Halle una fórmula que relacione v y t si la velocidad de la piedra al cabo

de un segundo es 32 pies/s. Si la piedra se lanza desde la parte superior de un edificio que tiene 144 pies de altura, ¿cuál es la velocidad cuando toca el suelo? [*Sugerencia:* utilice el problema 23].

25. El peso p de una persona varía directamente con el cubo del largo de la persona. A la edad de 13 años una persona de 60 pulgadas de altura pesa 120 libras. ¿Cuál es el peso de la persona a los 16 años cuando mide 72 pulgadas?

26. Un cuerpo sobre la superficie de la Tierra tiene un peso inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de la Tierra. Si un hombre pesa 80 kg en la superficie terrestre, ¿cuánto pesará a 300 km sobre dicha superficie? Tome 6,000 km como el radio de la Tierra.

27. La ley de la gravedad de Newton afirma que la fuerza F de atracción entre dos masas esféricas M y m cuyos centros de masa están r unidades separados, es conjuntamente proporcional a la primera potencia de cada masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r (véase figura 125). Exprese esta variación combinada como fórmula. Si la distancia r se reduce a la mitad, ¿entonces cuál es el efecto sobre la fuerza?

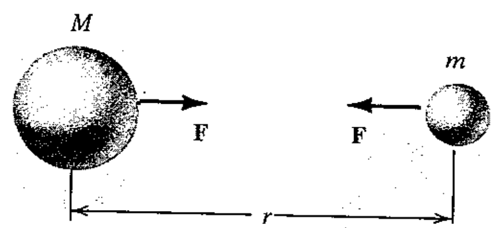


FIGURA 125

28. Según la tercera ley de Kepler del movimiento planetario, el cuadrado del período P de un planeta (esto es, el tiempo que toma un planeta en girar alrededor del Sol) es proporcional al cubo de su distancia media del Sol. El periodo de la Tierra es de 365 días y su distancia media del Sol es de 92,900,000 millas. Determine el periodo de Marte dado que su distancia media del Sol es de 142,000,000 millas.

29. Según la ley general de los gases, la presión P de una cantidad de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta T del gas e inversamente proporcional a su volumen V. Exprese esta variación combinada como fórmula. Un balón grande contiene 500 pies cúbicos de un gas al nivel del suelo, donde la presión es de 14.7 lb/pulg² y la temperatura absoluta es de 218°K (–20°C). ¿Cuál es el volumen ocupado por este gas a una altitud de 10 millas, donde la presión es de 1.5 lb/pulg² y la temperatura absoluta es de 218°K (–55°C)?

30. La temperatura de un tubo Pyrex se eleva de una temperatura t_1 a una temperatura final t_2. La expansión térmica e del tubo es conjuntamente proporcional a su longitud L y a la elevación de la temperatura. Cuando un tubo de 10 cm de longitud se calienta de 20°C a 420°C, su expansión térmica es de 0.012 cm. ¿Cuál es la expansión térmica del mismo tubo cuando se calienta de 20°C a 565°C?

31. El área superficial S (en metros cuadrados) de un animal es directamente proporcional a su peso p elevado a la potencia dos tercios y medido en kg. Para los humanos la constante de proporcionalidad es $k = 0.11$. Halle el área superficial de una persona cuyo peso es de 95 kg.

32. En el estudio de cuerpos elásticos, la tensión es directamente proporcional a la distensión. Para un alambre de longitud L y área transversal A que se estira en una cantidad e por medio de una fuerza aplicada F, la tensión se define como F/A y la distensión está dada por e/L. Halle una fórmula que exprese e en términos de las otras variables.

33. El calor Q (calorías) que se genera en un conductor de resistencia R (ohmios) por el que circula una corriente de intensidad I (amperios) es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad, a la resistencia del conductor y al tiempo t durante el cual pasa la corriente. Halle una fórmula que exprese I en términos de las otras variables.

34. El paso de una cuerda vibrante de sección transversal dada es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional a su longitud. Compare los pasos de dos cuerdas vibrantes si la primera tiene la mitad de la longitud de la segunda y está sujeta a una tensión doble.

CONCEPTOS IMPORTANTES

Sistema de coordenadas cartesiano (rectangular)
Ejes coordenados
- eje x
- eje y

Plano cartesiano
- Plano de coordenadas
- Plano xy

Cuadrantes
Punto
- coordenadas
- abscisa
- ordenada

Marcación de puntos
Gráficas
- de una relación
- de una ecuación

Intersectos
Simetría

Fórmula de la distancia
Circuferencia
Fórmula del punto medio
Pendiente
Ecuaciones de rectas
- Forma punto-pendiente
- Forma pendiente-intersecto

Recta horizontal
Recta vertical
Rectas paralelas
Rectas perpendiculares
Función
Dominio
Variable dependiente
Variable independiente
Rango
Función definida a trozos

Función constante
Prueba de la recta vertical
Función lineal
Función par
Función impar
Composición de funciones
Gráficas trasladadas
Reflexiones
Función inversa
Función uno a uno
Prueba de la recta horizontal
Función potencia
Variación directa
Variación inversa
Variación conjunta
Variación combinada

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20, llene los espacios o responda falso o verdadero.

1. Si (a, b) es un punto del segundo cuadrante, entonces $(-a, -b)$ es un punto del __________ cuadrante.
2. La distancia entre los puntos $(5, 1)$ y $(-1, 9)$ es ________.
3. Si la gráfica de una ecuación contiene el punto $(-3, 1)$ y es simétrica con respecto al eje x, entonces la gráfica también contiene el punto __________.
4. Si A, B y C son puntos en el plano cartesiano, entonces siempre es verdadero que: $d(A,B) + d(B,C) > d(A,C)$. ________
5. El centro y el radio de la circunferencia $x^2+6x+y^2-2y+6=0$ son __________.
6. Las rectas $x+3y-1=0$ y $ky-y=3$ son perpendiculares si $k =$ __________.
7. La gráfica de $x = -6$ es una __________.
8. Los intersectos en x y en y, y la pendiente de la recta $-3y + 2x/3 = -1$ son __________.
9. Si f es una función tal que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. ______
10. $f(x)=(x^5+x)^3$ es una función impar. ______
11. Los intersectos en x y en y de la gráfica de la función $f(x)=-3x^2+2x+1$ son __________.
12. La gráfica de una función puede poseer sólo un intersecto en y. ________
13. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{2/(3-2x)}$ es ________.
14. La relación $x^2+y^2=2$ es una función __________.
15. Una función $y=f(x)$ tiene una inversa f^{-1} si y sólo si es ________________.
16. La función $f(x) = (x^2-1)/(x^2+1)$ tiene una inversa. ______
17. La gráfica de una función diferente de la función cero no puede ser simétrica con respecto al eje x. ________
18. Las raíces de la función $f(x) = x(x^3-1)(x^2-1)$ son ________.
19. Si f es una función uno a uno con dominio el conjunto R de los números reales, entonces $f^{-1}+(f(6))=$ __________.
20. Si p varía inversamente al cubo de q y $p = 1/3$ cuando $q = -3$, entonces $p =$ ________ cuando $q = 27$.
21. Determine si los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 4)$ y $C(4, -4)$ son vértices de un triángulo isósceles.
22. Halle una ecuación de una circunferencia cuyos puntos $(-4, 2)$ y $(6, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.
23. Halle una ecuación de la recta que pasa por $(3, -1)$ y es paralela a la recta $3x-2y-1=0$.
24. Halle una ecuación de la recta que pasa por $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(-3, 1)$ y $(2, 4)$.
25. Considere el segmento de recta que une $(-1, 6)$ y $(1, 10)$ y el segmento de recta que une $(7, 3)$ y $(-3, -2)$. Halle una ecuación de la recta que contenga los puntos medios de estos dos segmentos de recta.
26. Según la gráfica de $y = f(x)$ mostrada en la figura 126, trace las gráficas de cada uno de los siguientes numerales:

(a) $y=f(x)+2$ **(b)** $y=f(x+2)$ **(c)** $y+f(x)-1$

(d) $y=f(x-1)$ **(e)** $y=f(x+1/2)$ **(f)** $y=-f(x)$

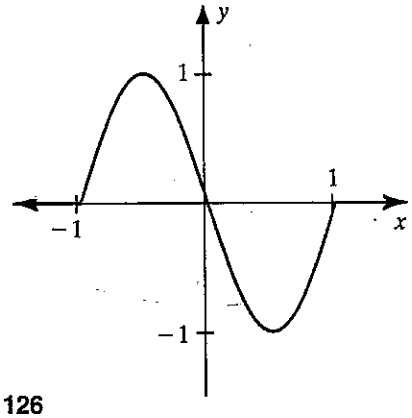


FIGURA 126

27. Halle todos los números del dominio de $f(x)=x^2+2x$ que correspondan al número 15 del rango.
28. Sea $f(x)=x$, $g(x)=|x|$ y $h(x)=[x]$* grafique las funciones (a) $= f + g$; (b) fg, y (c) $f + h$.
29. Si $f(x)=3x^2-x+6$, calcule y simplifique $\dfrac{f(x+h)-f(2)}{h}$
30. Si $f(x)=x^3-27$, evalúe y simplifique $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

En los problemas 31 y 32, grafique la relación dada.

31. $|y|\le x$
32. $y\le x^2-2x+1$

En los problemas 33 al 36, grafique la ecuación dada.

33. $|y|=|x|$
34. $|x|-|y|=1$
35. $x^2+y^2-9=0$
36. $y^2-x^4=0$

En los problemas 37 al 42, grafique la ecuación dada.

37. $f(x)=6-2x$
38. $f(x)=-x/5$
39. $f(x)=2x^2+1$
40. $f(x)=x^2-(x+2)$
41. $f(x)=|x-3|+|x|$
42. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & |x|\ge 2 \\ x, & |x|<2 \end{cases}$

En los problemas 43 y 44, halle $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$, $f\circ(1/g)$ para cada una de las funciones dadas.

43. $f(x)=x^3, f(x)=2/x^2$
44. $f(x)=3x+1, g(x)=x^2+2x$

En los problemas 45 y 46, halle la inversa de la función uno a uno dada.

45. $f(x)=(x+3)/(x-3)$
46. $f(x)=3\sqrt{x-2}$

* $h(x) = [x]$ es la función parte entera (véase problema 61 en el ejercicio 3.5).

47. Exprese el radio r de un círculo como una función de su área A.

48. Una caja rectangular, abierta arriba, tiene una base cuadrada. Sea x la longitud de un lado de esta base. Si el volumen de la caja es de 1,200 pulgadas cúbicas, exprese el área superficial total s de la caja como una función de x.

49. Considere el rectángulo inscrito en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, mostrado en la figura 127. Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

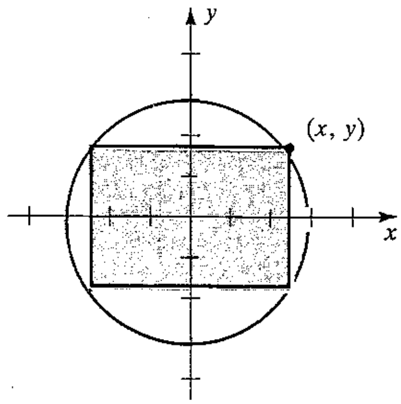


FIGURA 127

50. Considere los cuatro círculos de radio h mostrados en la figura 128. Exprese el área A de la región sombreada como una función de h.

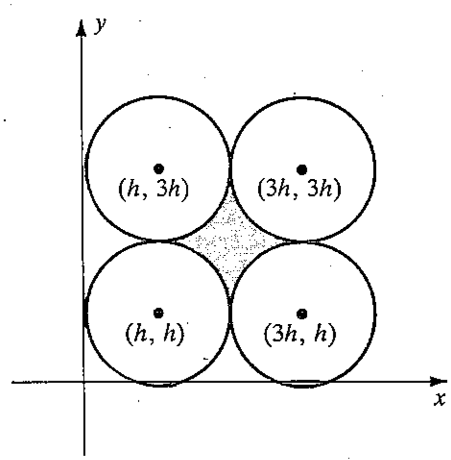


FIGURA 128

51. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es un número racional} \\ 0, \text{ si } x \text{ es un número irracional,} \end{cases}$

halle lo siguiente.

(a) $f(2\sqrt{3})$ **(b)** $f(e)$

(c) $f(-2)$ **(d)** $f(3.75)$

(e) $f(-2/3)$ **(f)** $f(\pi)$

52. Complete, tomando como referencia la gráfica de la función $y = f(x)$ que se muestra en la figura 129.

$f(-3) =$ ____________ $f(3.5) =$ ____________

$f(-2) =$ ____________ $f(2) =$ ____________

$f(-1) =$ ____________ $f(0) =$ ____________

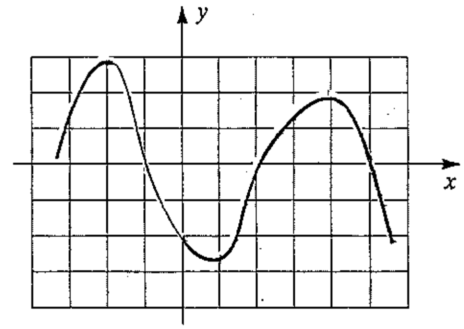


FIGURA 129

$f(5) =$ ____________ $f(1/2) =$ ____________

$f(-1/2) =$ ____________ $f(1) =$ ____________

53. Un modelo simple de formación glaciar predice que la densidad h de un pedazo de hielo a una distancia r de su centro C está dada por la función

$$h(r) = \sqrt{(2\tau_0 / \rho g)(L - r)}$$

donde τ_0 es una constante llamada límite de tensión, ρ es la densidad del hielo, g es la aceleración de gravedad y $2L$ es la anchura de un corte transversal del pedazo de hielo (véase figura 130). Utilizando datos de estudios sobre glaciares en Groenlandia, tenemos que

$$\tau_0/\rho g = 11\, m \text{ y } L \approx 450{,}000 \text{ m}$$

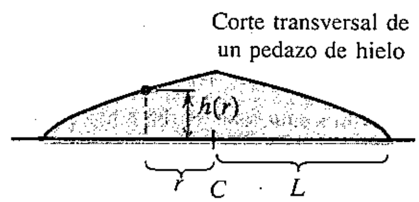


FIGURA 130

(a) ¿Cuál es el dominio de la función h?

(b) Utilice la función para predecir la densidad del pedazo de hielo de Groenlandia en su centro.

(c) ¿A qué distancia del centro se predice que el glaciar será tan denso como en el centro?

54. Kinnear y Brown (1967) presumieron que la velocidad mínima R del corazón (en latidos por segundo) de los marsupiales está dada por la función potencia

$$R(m) = 106m^{-0.27}$$

donde m es la masa del cuerpo (en kilogramos).

(a) Uno de los marsupiales más pequeños es el ratón marsupial, cuya masa es aproximadamente de 19 g. Calcule la velocidad mínima de su corazón a partir de la función potencia dada (el valor observado es de 292 latidos por minuto).

(b) La velocidad observada del corazón de un canguro gris del norte de Australia es de alrededor de 47 latidos por minuto. ¿Qué indica la función Kinnear–Brown para la masa de un canguro gris? (El valor observado es de 18.7 kg).

55. Un método práctico afirma que el tono T de una campana es inversamente proporcional a la raíz cúbica de su peso p. Una campana que pesa 800 libras tiene un tono de 512 ciclos por segundo. ¿Qué tan pesada debe ser una campana similar para que produzca un tono de 256 ciclos por segundo (media C)?

56. La capacidad de carga C de una viga rectangular horizontal sostenida en ambos extremos es conjuntamente proporcional a su ancho, y el cuadrado de su altura h es inversamente proporcional a su longitud l. Exprese esta variación combinada como una fórmula.

57. En física, la ley de Wien afirma que la longitud de onda L (en metros) de la más intensa radiación proveniente de un cuerpo es inversamente proporcional a su temperatura T (en grados Kelvin). La constante de proporcionalidad es 0.00290. Halle la longitud de onda de luz amarilla visible del Sol si su temperatura superficial es de 6,000°K.