

Pauta Control 4 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 7 de Abril, 2011

Tiempo : 15 minutos .

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{6^k}{7}$$

es divisible por 7.

Solución:

Notar que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{6^k}{7} &= \frac{1}{7} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 6^k \\ &= \frac{1}{7} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 6^k 1^{(n+1)-k} \\ &= \frac{1}{7} (6+1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{7} 7^{n+1} \\ &= 7^n \end{aligned}$$

2. Demuestre que para todo $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ se tiene que

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Solución:

Notar que

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= k \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$