Capítulo 7
Números Reales
Desigualdades e Inecuaciones

7.1 Números reales.

Suponemos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ a cuyos elementos se llaman números reales

Axiomas de suma

En $\mathbb{R}$, se define una operación que se llama suma que verifica $\forall\ x, y,\ z$ reales arbitrarios los siguientes axiomas:

S$_1$ $(x + y) \in \mathbb{R}$

S$_2$ $x + y = y + x$

S$_3$ $x + (y + z) = (x + y) + z$

S$_4$ El conjunto $\mathbb{R}$ contiene un elemento que se acostumbra a denotar por 0 y que verifica $x + 0 = x$

S$_5$ El conjunto $\mathbb{R}$ contiene un elemento que se acostumbra a denotar por $-x$ y que verifica $x + (-x) = 0$

Axiomas de multiplicación

Análogamente, en $\mathbb{R}$ definimos una segunda operación llamada multiplicación que verifica $\forall\ x, y$ y z reales arbitrarios los siguientes axiomas:

M$_1$ $(x\, y) \in \mathbb{R}$

M_2 $\quad x\,y = y\,x$

M_3 $\quad x\,(y\,z) = (x\,y)\,z$

M_4 $\quad$ El conjunto $\mathbb{R}$ contiene un elemento que se acostumbra a denotar por 1 y que verifica $x\,1 = x$

M_5 $\quad$ El conjunto $\mathbb{R}$ contiene un elemento que se acostumbra a denotar por x^{-1} con $x \neq 0$ y que verifica $x\,x^{-1} = 1$

Axioma de distribución

Para todo x, y y z reales arbitrarios se tiene $\quad x\,(y+z) = x\,y + x\,z$

Nota 1.

Asi $\mathbb{R}$, con estas operaciones definidas y axiomas constituye un cuerpo. A partir de estos axiomas se fundamentan los reglas del álgebra elemental de reales, que expondremos a continuación como teoremas.

Teorema 1

1) El elemento neutro 0 es único.
2) El opuesto $(-x)$ para cada real x, es único.
3) El opuesto de $(-x)$ es x, es decir $-(-x) = x$
4) Si $x + z = y + z \Rightarrow x = y$
5) Dados x, y existe un único z tal que $x + z = y$, el cual se acostumbra a denotar $z = y - x$
6) $x\,(-y) = -(x\,y) = (-x)\,y$
7) $x\,(y - z) = x\,y - x\,z$
8) $0\,x = 0$
9) $x\,y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$
10) El elemento neutro 1 es único
11) El inverso x^{-1} de $x \neq 0$ es único
12) El inverso de x^{-1}es x, es decir $(x^{-1})^{-1} = x$
13) Si $x\,z = y\,z \Rightarrow x = y$
14) Dados x, y existe un único z tal que $x\,z = y$, el cual se acostumbra a denotar por $\frac{y}{x}$ o $y\,x^{-1}$con $x \neq 0$

15) $\forall\, x, y \neq 0\,;\ (x\,y)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

16) $\forall\, x, y \neq 0\,;\ \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$

17) $\forall\, x \neq 0\,;\ (-x)^{-1} = -(x^{-1}) = -x^{-1}$

Nota 2.

Algunas de las demostraciones de este teorema se encuentran en ejercicios resueltos y el resto se dejan como ejercicios propuestos.

7.2 Orden en los reales.

Sea un $\mathbb{R}^+$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ llamado conjunto de los reales positivos, cuyos elementos satisfacen los siguientes axiomas

Axiomas de orden

O_1 $\quad 0 \neq \mathbb{R}^+$

O_2 $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+\,,\ (x+y) \in \mathbb{R}^+$ y $(x\,y) \in \mathbb{R}^+$

O_3 $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0\,;\ x \in \mathbb{R}^+ \vee -x \in \mathbb{R}^+$

Teorema 2

1) $1 \in \mathbb{R}^+\ (\mathbb{R}^+ \neq \emptyset)$

2) $\mathbb{R}^- \neq \emptyset$

3) $0 \notin \mathbb{R}^-$

4) $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$

5) $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}$

Observe que $5)$ garantiza que cada real es: negativo, nulo o es positivo es decir

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ x \in \mathbb{R}^- \vee x = 0 \vee x \in \mathbb{R}^+$$

Nota 3.

Algunas de las demostraciones del teorema 2 se encuentran en ejercicios resueltos y el resto se dejan como ejercicios propuestos

Definición 1.

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ se definen las relaciones; "$>$"(mayor que), "$<$"(menor que), "$\geq$"(mayor o igual que) y "$<$"(menor o igual que) por:

i) $x > y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}^+$

ii) $x < y \Leftrightarrow y > x$

iii) $x \geq y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}^+ \vee (x = y)$

iv) $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$

Observación 1.

A partir de los axiomas de orden y de la definición 1 se derivan todas las reglas para operar con desigualdades, las cuales se expondran en el teorema 3.

Teorema 3

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene una y solo una de las siguientes relaciones:

$$x < y \ \vee\ x = y \ \vee\ x > y$$

2) Si $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$

3) $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z$

4) Si $x > y \wedge z > 0 \Rightarrow x\,z > y\,z$

5) Si $x > y \wedge z < 0 \Rightarrow x\,z < y\,z$

6) Si $x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Rightarrow x^2 > 0$

7) Si $x\,y > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$

8) Si $x > y \wedge z > w \Rightarrow x + z > y + w$

9) Si $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

10) Si $x > y > 0 \Rightarrow y^{-1} > x^{-1}$

11) Si $x > y > 0 \wedge z > w > 0 \Rightarrow x\,z > y\,w$

12) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene : $x^2 + y^2 \geq 2\,x\,y$

13) Si $x > y$, existe $z \in \mathbb{R}$, tal que $x > z > y$

14) Si $x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$

Nota 4.

Algunas de las demostraciones del teorema 3 se encuentran en ejercicios resueltos y el resto se dejan como ejercicios propuestos

Tambien hacemos notar que ahora el cuerpo de los reales, es **ordenado.**

Desigualdades notables

I.

$$MA \geq MG \geq MH$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdot \cdot \cdot + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \cdot \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

II. De **Cauchy-Schwarz**

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales arbitrarios, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

Valor absoluto

El valor absoluto o módulo de un número real x se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Teorema 4.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = |-x|$
3) $|x|^2 = |x^2| = x^2$
4) $|xy| = |x||y|$
5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall y \neq 0$
6) $|x| \leq a,\ a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
7) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$

8) $\qquad |x+y| \leq |x|+|y|$

Nota 5.

Como es habitual algunas de las demostraciones del teorema 4 se encuentran en ejercicios resueltos y el resto se dejan como ejercicios propuestos.

7.3. Ejercicios Resueltos.

1. Si $a+b=0 \wedge a+c=0 \Rightarrow b=c$

Demostración.

Por S_3 y S_2 se tiene : $b+(a+c) = (b+a)+c \Rightarrow b+(a+c) = (a+b)+c$ de donde utilizando las hipótesis dadas $b+0=0+c \Rightarrow b=c$

2. Demuestre que si $x+a=b$ entonces $x=b-a$

Demostración.

$x+a=b \Leftrightarrow x+a+(-a)=b+(-a) \Leftrightarrow x+[a+(-a)] = b-a \Leftrightarrow$
$x+0 = b-a$ luego $x = b-a$.

3. Demuestre que el elemento neutro 0 es único

Demostración.

Supongamos que en $\mathbb{R}$, además del 0 hay otro elemento $0'$ tal que:
$x+0'=x, \forall x \in \mathbb{R}$ entonces
$$0' = 0'+0=0+0'=0$$ por tanto el 0 es único.

4. Demuestre que:

a) $-(-x)=x$
b) $(-x)+(-y) = -(x+y)$

Demostración.

a) Se tiene que $x+(-x) = 0$, donde esta ecuación nos indica que x es el opuesto de $(-x)$ esto es, $x = -(-x)$ como se quería.

b) Para evitar acumulación de paréntesis sea $x' = -x$ y $y' = -y$; luego

$(x+y)+(x'+y') = [(x+y)+x']+y' = [x+(y+x')]+y' =$

$[x+(x'+y)]+y' = [(x+x')+y]+y' = (0+y)+y' = y+y' = 0$ ahora como $x'+y' = (-x)+(-y)$ es el inverso de la suma de $x+y$, entonces concluímos que

$$-(x+y) = (-x)+(-y).$$

5. Demuestre que:

a) $0\,x = 0$

b) $x(-y) = -(x\,y) = x(-y)$

c) $(x\,y)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \forall\, x, y \neq 0$

Demostración.

a) $0\,x = 0\,x \Leftrightarrow (0+0)\,x = 0\,x \Leftrightarrow 0\,x+0\,x = 0\,x \Leftrightarrow 0\,x = 0\,x - 0\,x = 0$

b) Previamente haremos ver que $(-1)\,x = (-x)$,

$x+(-1)\,x = 1\,x+(-1)\,x = [1+(-1)]\,x = 0\,x = 0$ y como $x+(-x) = 0$, se concluye que $(-1)\,x = (-x)$, entonces tenemos

$x(-y) = x[(-1)y] = [x(-1)]\,y = [(-1)\,x]\,y = (-1)(x\,y) = -(x\,y)$ análogamente se prueba que $x(-y) = -(x\,y)$ con lo que $x(-y) = (-x)\,y$

c) Notemos que $(x\,y)(x^{-1}y^{-1}) = [(x\,y)\,x^{-1}]\,y^{-1} = [x^{-1}(x\,y)]\,y^{-1} = [(x^{-1}x)\,y]\,y^{-1} = y\,y^{-1} = 1$ con lo que el inverso de $(x\,y)$ resulta ser $(x^{-1}y^{-1})$, y como también el inverso de $(x\,y)$ es $(x\,y)^{-1}$, tenemos que por unicidad del inverso $(x\,y)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

6. Demuestre que :

a) $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$

b) $x > y \wedge z < 0 \Leftrightarrow xz < yz$

c) $x > y > 0 \wedge z > w > 0 \Rightarrow x\,z > y\,w$

Demostración.

a) $(x > y \wedge y > z) \Leftrightarrow \{(x-y) \in \mathbb{R}^+ \wedge (y-z) \in \mathbb{R}^+\}$, por axioma 1 la suma está en $\mathbb{R}^+$, por tanto $(x-z) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x > z$.

b) $(x > y \wedge z < 0) \Leftrightarrow \{(x-y) \in \mathbb{R}^+ \wedge (-z) \in \mathbb{R}^+\}$, por axioma 2 el producto está en $\mathbb{R}^+$, luego

$$(x-y)(-z) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (yz - xz) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow xz < yz$$

c) $(x > y > 0 \wedge z > w > 0) \Leftrightarrow$

$\{(x-y)\in\mathbb{R}^{+}\ \wedge x,\, y\in\mathbb{R}^{+}\}\wedge\{(z-w)\in\mathbb{R}^{+}\ \wedge z,\, w\in\mathbb{R}^{+}\}$, por axioma 2 se tiene: $(x-y)z\in\mathbb{R}^{+}\wedge(z-w)y\in\mathbb{R}^{+}$ y ahora por axioma 1 se tiene $x\,z>y\,w$

7. Demuestre que:

a) $|xy|=|x||y|$

b) $|x|\leq a,\, a>0\ \Leftrightarrow\ -a\leq x\leq a$

Demostración.

a) Si $x,y\geq 0\ \Leftrightarrow |xy|=xy=|x||y|,$

si $x,y<0\ \Leftrightarrow |xy|=xy=(-x)(-y)=|x||y|,$ finalmente

si $x>0$ e $y<0\ \Leftrightarrow\ |xy|=-(xy)=x\,(-y)=|x||y|.$

b) Si $x\geq 0\Rightarrow |x|=x\leq a,\ a>0\ (1)$

si $x<0\Rightarrow |x|=\ -x\leq a\Leftrightarrow x\geq\ -a,\ (2)$ luego por (1) y (2) se tiene $-a\leq x\leq a.$

8. Demuestre que:

$$|x-y|\geq||x|-|y||$$

Demostración.

Sea $x-y=z\ \Rightarrow x=z+y\ \Rightarrow$

$|x|=|z+y|\leq|z|+|y|\ \Rightarrow |x|\leq|x-y|+|y|\ \Rightarrow |x-y|\geq|x|-|y|,$ de aquí $-|x-y|\leq|y|-|x|\leq|y-x|=|x-y|,$ como $|x-y|\geq 0$ entonces $|x-y|\geq||x|-|y||$

9. Si $a>b>0$ demuestre que $a>\frac{1}{2}(a+b)\ \geq\ \sqrt{ab}\ >\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}>b$

Demostración.

$a>b\Leftrightarrow 2a>a+b\Leftrightarrow a>\frac{1}{2}(a+b)$ (1), por otra parte

$(a-b)^{2}\geq 0\Leftrightarrow a^{2}+b^{2}\geq 2ab\Leftrightarrow(a+b)^{2}\geq 4ab\Leftrightarrow\frac{1}{2}(a+b)\ \geq\ \sqrt{ab}$ (2), ahora como $(a+b)^{2}\geq 4ab\ \Leftrightarrow\ (a+b)^{2}ab\geq 4a^{2}b^{2}\ \Leftrightarrow\ (a+b)\sqrt{ab}\geq 2ab$ $\Leftrightarrow\sqrt{ab}\ >\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (3), tambien como $a>b\ \Leftrightarrow\ ab>b^{2}\Leftrightarrow\ 2ab>b^{2}+ab$ $\Leftrightarrow\frac{2ab}{a+b}>b\Leftrightarrow\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}>b$ (4). Finalmente por $(1),\,(2),\,(3)$ y (4) se tiene lo pedido.

10. Demuestre que para todo a, b positivos se tiene

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

Demostración.

Analizando la tesis, induce a partir de $(a-b)^2(a+b) \geq 0 \Rightarrow$

$(a^2 - b^2)(a-b) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

11. Para todo a, b, c reales positivos demuestre

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

Demostración.

a) Como $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$, analogamente $b^2 + c^2 \geq 2bc$ y $c^2 + a^2 \geq 2ac$, y sumando miembro a miembro estas desigualdades y simplificando se obtiene $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) Sumando $2ab + 2bc + 2ca$ a la desigualdad demostrada en a) se tiene lo pedido.

12. Si $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 1$, demostrar que

$$ax + by \leq 1$$

Demostración.

$$(a-x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + x^2 \geq 2ax$$

$$(b-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + y^2 \geq 2by$$

sumando miembro a miembro $a^2 + x^2 + b^2 + y^2 \geq 2ax + 2by$ ahora ocupando la hipótesis y simplificando se llega a $ax + by \leq 1$.

13. Si a, b, c reales demuestre

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$$

Demostración.

Como $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$; análogamente

$b^2 + c^2 \geq 2bc$ y $c^2 + a^2 \geq 2ac$ de donde:

$(a^2+b^2)c^2 \geq 2abc^2;\qquad (b^2+c^2)a^2 \geq 2bc\,a^2$ y $(c^2+a^2)b^2 \geq 2acb^2,$

sumando miembro a miembro estas 3 expresiones, obtenemos:

$2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) \geq 2abc(a+b+c) \Leftrightarrow$

$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$

14. Si a, b, c reales positivos y distintos entre si, demuestre que

$$\frac{a+b+c}{3} > \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{\frac{1}{2}} > (abc)^{\frac{1}{3}}$$

Demostración.

Como: $a^2+b^2 > 2ab;\quad b^2+c^2 > 2bc$ y $c^2+a^2 > 2ac$

Sumando miembro a miembro y simplificando se obtiene

$a^2+b^2+c^2 > ab+bc+ca \Leftrightarrow$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca > 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$

$$(a+b+c)^2 > 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} > \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Ahora, de la desigualdad notable $M.A. \geq M.G.$ se tiene

$$\frac{ab+bc+ca}{3} > \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{\frac{1}{2}} > (abc)^{\frac{1}{3}} \qquad (2)$$

finalmente de (1) y (2) se obtiene

$$\frac{a+b+c}{3} > \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{\frac{1}{2}} > (abc)^{\frac{1}{3}}$$

15. Si a, b, c son cantidades positivas, demostrar

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

Demostración.

Como: $a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b}{2} \quad (1)$

analogamente: $\dfrac{b^2+c^2}{b+c} \geq \dfrac{b+c}{2} \qquad (2); \qquad \dfrac{c^2+a^2}{c+a} \geq \dfrac{c+a}{2} \qquad (3)$

sumando miembro amiembro $(1),(2)$ y (3) se obtiene

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

16. Si a, b, c son reales positivos y distintos, demuestre

a) $(a+b+c)(ab+bc+ca) > 9abc$
b) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) > 6abc$

Demostración.

a) Aplicando la desigualdad notable $MA > MG > MH$, se tiene:

$\frac{1}{3}(a+b+c) > \sqrt[3]{abc}$ y $\frac{1}{3}(ab+bc+ca) > \sqrt[3]{ab\,bc\,ca}$ multiplicando miembro a miembro se tiene lo pedido.

b) Aplicando la misma desigualdad notable se tiene de inmediato lo pedido.

17. Demostrar para a, b, x, y reales positivos cualquiera, que

$$(ab+xy)(ax+by) \geq 4abxy$$

Demostración.

a) Aplicando la desigualdad notable $MA \geq MG \geq MH$, tenemos:

$$\frac{ab+xy}{2} \geq \sqrt{abxy} \quad \text{y} \quad \frac{ax+by}{2} \geq \sqrt{axby}$$

multiplicando miembro a miembro se tiene $(ab+xy)(ax+by) \geq 4abxy$

18. Si $x+y+z=6$, demostrar que: $\quad x^2+y^2+z^2 \geq 12$

Demostración.

Como ya sabemos: $x^2+y^2 \geq 2xy;\ \ y^2+z^2 \geq 2yz;\ \ z^2+x^2 \geq 2zx$

ahora sumando miembro a miembro $\quad x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \qquad (1)$

Por otra parte de $x+y+z=6 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=36 \Leftrightarrow$

$xy+yz+zx = 18-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ finalmente remplazando en (1) se obtiene

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$

19. Si a, b, c son reales positivos y distintos, demuestre que

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b)$$

Demostración.

De $(a - b)^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab > ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 > ab(a + b) \quad (1),$

de igual modo : $b^3 + c^3 > bc(b + c) \quad (2); \quad c^3 + a^3 > ac(a + c) \quad (3)$

sumando miembro a miembro (1), (2) y (3) se obtiene

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b)$$

20. Si $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^+$, demostrar que

$$\left(x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z}\right) \geq 9\sqrt{abcxyz}$$

Demostración.

Aplicando la desigualdad notable $MA \geq MG \geq MH$, obtenemos:

$\frac{x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{3} \geq \sqrt[3]{xyz\sqrt{abc}}$ y $\frac{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}}{3} \geq \sqrt[3]{abc\sqrt{xyz}}$

Multiplicando miembro a miembro estas dos expresiones

$$\left(x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z}\right) \geq 9\sqrt[3]{abcxyz\sqrt{abcxyz}} =$$

$$9\sqrt[3]{\sqrt{(abcxyz)^3}} = 9\sqrt{abcxyz}$$

21. Si a, b, c son reales positivos y distintos, demuestre que

$$\frac{9}{a + b + c} < \frac{2}{a + b} + \frac{2}{b + c} + \frac{2}{c + a} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Demostración.

Aplicando $M.A. > M.H.$ se tiene:

$$\frac{(a + b) + (b + c) + (c + a)}{3} > \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}} \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) > \frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{a+b+c} < \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \qquad (1)$$

Por otra parte: $\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} > \dfrac{2}{a+b}\ (2),$ y también

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2} > \frac{2}{b+c} \quad (3); \qquad \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2} > \frac{2}{c+a} \qquad (4)$$

sumando $(2),(3)$ y (4) : $\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a} < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \qquad (5)$

Finalmente de (1) y (5) y por la propiedad transitiva, se concluye

$$\frac{9}{a+b+c} < \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

22. Si a,b,c son los lados de un triángulo, demostrar que

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Demostración.

Por hipótesis :

$a+b>c \Rightarrow a+b-c=x>0;\ \ b+c-a=y>0;\ \ c+a-b=z>0$

Por ejercicio anterior y considerando que los lados de un triángulo puede ser iguales, se tiene:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}$, pero $x+y=2b;\ y+z=2c;\ z+x=2a$

luego: $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b} \geq \dfrac{2}{2b}+\dfrac{2}{2c}+\dfrac{2}{2a} = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

23. Si a y b son reales positivos con $a^2+b^2=4$, demostrar:

a) $a^2b^2 \leq 4$

b) $a^4+\dfrac{1}{a^4}+b^4+\dfrac{1}{b^4} \geq \dfrac{17}{2}$

Demostración.

a) Como $a^2+b^2 \geq 2ab$ y $a^2+b^2=4 \Rightarrow 4 \geq 2ab \Leftrightarrow \quad a^2b^2 \leq 4$

b) Sea $A = a^4 + b^4 + \dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{b^4} = \left(a^2+b^2\right)^2 - 2a^2b^2 + \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)^2 + \dfrac{2}{a^2b^2}$

Ahora por a) $2a^2b^2 \leq 8$, como al restar una cantidad positiva mayor (8 en lugar de $2a^2b^2$) la expresión A se hace mayor, luego

$$A \geq \left(a^2+b^2\right)^2 - 8 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{2}{a^2b^2};$$

además $\left(a^2+b^2\right)^2 = 16$ y $\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)^2$ es positivo y al eliminarlo A se hace aún mayor, por tanto

$A \geq 16 - 8 + \dfrac{1}{2}$, con lo que $a^4 + \dfrac{1}{a^4} + b^4 + \dfrac{1}{b^4} \geq \dfrac{17}{2}$

24. Si a, b, c, d son números reales positivos, demostrar

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\sqrt{d} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \tfrac{3}{2}(a+b+c+d)$$

Demostración.

Aplicando $M.A. \geq M.G.$ se tiene:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,;\ \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}\,;\ \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}\,;\ \frac{a+d}{2} \geq \sqrt{ad}\,;$$

$$\frac{b+d}{2} \geq \sqrt{bd}\,;\ \frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd},$$

sumando miembro a miembro estas 6 expresiones y factorizando convenientemente obtenemos

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\sqrt{d} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \tfrac{3}{2}(a+b+c+d)$$

25. Demostrar para $x,\ y,\ z$ reales positivos y distintos entre si, que:

a) $(x+y+z)^3 \geq 27(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

b) $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

Demostración.

a) Préviamente demostraremos $(a+b+c)^3 \geq 27\,abc$ (1)

lo que resulta de inmediato pués $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq 27\,abc$

Ahora haciendo $a = x + y - z$; $b = y + z - x$; $c = z + x - y$ en (1) resulta

$(x + y + z)^3 \geq 27(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$.

b) Préviamente demostraremos $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\,abc$

que también resulta de aplicar $M.A. \geq M.G.$, pués para a, b, c positivos

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,; \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}\,; \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

multiplicando miembro a miembro, se tiene $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\,abc \quad (2)$

Ahora de la parte a) $a + b = 2y$; $b + c = 2z$ y $c + a = 2x$,

finalmente en (2) y simplificando, se tiene

$$xyz \geq (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y).$$

26. Si $x > y > z > 0$, demuestre que la expresión

$A = x^2(x - y)(x - z) + y^2(y - z)(y - x) + z^2(z - x)(z - y)$ es positiva.

Demostración.

$$A = (x - y)[\,x^2(x - z) - y^2(y - z)\,] + z^2(z - x)(z - y)$$
$$= (x - y)[x^3 - y^3 - x^2z + y^2z\,] + z^2(z - x)(z - y)$$
$$= (x - y)^2[\,x^2 + xy + y^2 - xz - yz\,] + z^2(x - z)(y - z)$$
$$= (x - y)^2[\,x(x - z) + y(y - z) + xy\,] + z^2(x - z)(y - z)$$

Expresión que resulta positiva pués por hipótesis se tiene $x > y > z > 0$.

27. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, demostrar que

$$2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 15\,abc$$

Demostración.

Aplicando $M.A. \geq M.G.$ es fácil demostrar que:

$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6abc$ y $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, de donde

$2a^2(b + c) + 2b^2(c + a) + 2c^2(a + b) \geq 12abc$ y

$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$, ahora sumando miembro a miembro

$$2(a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)) \geq a^3+b^3+c^3+15\,abc$$

finalmente de aquí, $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq a^3+b^3+c^3+15\,abc$

28. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ distintos entre si, demostrar que

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

Demostración.

Aplicando la desigualdad de **Cauchy- Schwarz** a los números:

$x_1 = \sqrt{a}\,,\ x_2 = \sqrt{b}\,, x_3 = \sqrt{c}\,;\qquad y_1 = \sqrt{a^3}\,, y_2 = \sqrt{b^3}\,, y_3 = \sqrt{c^3}\,,$

se tiene de inmediato

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

29. Si $a_1, a_2, \ldots., a_n$ son reales positivos tales que, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n = 1$ demostrar que $(1+a_1)(1+a_2) \cdot \cdot \cdot \cdot (1+a_n) \geq 2^n$

Demostración.

Como: $\frac{1+a_i}{2} \geq \sqrt{a_i}\,,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots., n$ de aquí $(1+a_i) \geq 2\sqrt{a_i}$

multiplicando miembro a miembro estas n desigualdades, se tiene

$$(1+a_1)(1+a_2) \cdot \cdot \cdot \cdot (1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1 a_2 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n} = 2^n$$

30. Si $a_3 > a_2 > a_1$ demostrar

$$|\,x-a_1| + |\,x-a_2| + |\,x-a_3| \geq a_3 - a_1$$

¿Para que valores de x se cumple la igualdad?

Demostración.

$$|\,x-a_1| + |\,a_2-x\,| \geq |\,a_2-a_1|$$
$$|\,x-a_2| + |\,a_3-x\,| \geq |\,a_3-a_2|$$
$$|\,x-a_3| + |\,a_1-x\,| \geq |\,a_1-a_3|,$$ sumando miembro amiembro:

$2(|\,x-a_1| + |\,x-a_2| + |\,x-a_3|) \geq |\,a_2-a_1| + |\,a_3-a_2| + |\,a_1-a_3|,$
aplicando las hipótesis se tiene:

$2(|\,x-a_1| + |\,x-a_2| + |\,x-a_3|) \geq a_2-a_1+a_3-a_2-(a_1-a_3) = 2(a_3-a_1)$
luego $|\,x-a_1| + |\,x-a_2| + |\,x-a_3| \geq a_3-a_1$

La igualdad se cumple para $x = a_2$.

31. Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; demostrar que

a) $(n+1)^n > 2^n n!$

b) $(n!)^3 < n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$

Demostración.

a) Aplicando la desigualdad notable $M.A. > M.G.$ a los n primeros números pares, se tiene

$$\frac{2+4+6+\ \cdot\cdot\cdot + 2n}{n} > \sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdot\cdot 2n} \quad \Leftrightarrow$$

$$2(1+2+\ \cdot\cdot\cdot + n) > n\sqrt[n]{2^n(1\cdot 2\cdot\ \cdot\cdot\cdot n)} \ \Leftrightarrow (n+1) > \sqrt[n]{2^n\cdot n!}$$

$$\Leftrightarrow\ (n+1)^n > 2^n n!$$

b) Analogamente

$$\frac{1^3+2^3+\ \cdot\cdot\cdot + n^3}{n} > \sqrt[n]{1^3\cdot 2^3\cdot\ \cdot\cdot n^3} \ \Leftrightarrow \frac{1}{n}[\frac{1}{2}n(n+1)]^2 > \sqrt[n]{(n!)^3}$$

$$n[\frac{1}{2}(n+1)]^2 > \sqrt[n]{(n!)^3} \ \Leftrightarrow\ (n!)^3 < n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}.$$

32. Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; demostrar que

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{n^2} \ < \ 2-\frac{1}{n}$$

Demostración.

Observando que: $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n},\ n > 1$

se tiene:

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

sumando miembro a miembro y agregando 1 a ambos miembros, se recibe

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{1}{n^2}\ <\ 2-\frac{1}{n}$$

33. Si $a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b$; demuestre que:

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}\ >\ \sqrt[n+1]{a^{n+1}+b^{n+1}}$$

Demostración.

$$(a^n+b^n)^{\frac{n+1}{n}}=(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}(a^n+b^n)=(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}a^n+(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}b^n$$
$$>(a^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n)^{\frac{1}{n}}=a^{n+1}+b^{n+1}$$

por tanto $(a^n+b^n)^{\frac{n+1}{n}}\ >\ a^{n+1}+b^{n+1}\ \Leftrightarrow\ \sqrt[n]{a^n+b^n}\ >\ \sqrt[n+1]{a^{n+1}+b^{n+1}}$

34. Si $n \in \mathbb{N},\ n > 1$; demostrar que

$$(n+1)^{n+1} > 2^{n+1}n^n$$

Demostración.

Tomando la sucesión: $a_1=\dfrac{1}{n},\ a_2=\dfrac{1}{n},\ \ldots\ldots,\ a_n=\dfrac{1}{n}$ y $a_{n+1}=\dfrac{1}{n}$

y aplicando $M.A. > M.G.$

$$\frac{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{1}{n}+1\right)}{n+1}>\sqrt[n+1]{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \frac{1}{n}}\ \Leftrightarrow\ \frac{n\cdot\frac{1}{n}+1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\frac{1}{n^n}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{n+1}>\sqrt[n+1]{\frac{1}{n^n}}\ \Leftrightarrow\ \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}>\frac{1}{n^n}\ \Leftrightarrow\ (n+1)^{n+1}>2^{n+1}n^n$$

35. Si $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$2^n \geq 1+n\sqrt{2^{n-1}}$$

Demostración.

Como es habitual aplicamos $M.A. \geq M.G.$ a la sucesión: $1,\ 2,\ 2^2, \ldots, 2^{n-1}$

$$\frac{1+2+2^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\ 2^{n-1}}{n}\geq\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\ \cdot\ \cdot 2^{n-1}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(2^n-1)\geq[2^{1+2+\cdots+(n-1)}]^{\frac{1}{n}}\ \Leftrightarrow\ 2^n-1\geq n[\,2^{\frac{1}{2}n(n-1)}]^{\frac{1}{n}}\ \Leftrightarrow$$

$$2^n-1\geq n\,2^{\frac{1}{2}(n-1)}\ \Leftrightarrow\ 2^n\geq 1+n\sqrt{2^{n-1}}$$

36. Si $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n}} < 1$$

Demostración.

Para $n \geq 1 \Leftrightarrow n-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2n-1 \geq n \Leftrightarrow \dfrac{2n-1}{2n} \geq \dfrac{1}{2}$ $\qquad (1)$

por otra parte $1 > 0 \Leftrightarrow 2n+1 > 2n \Leftrightarrow 2n > 2n-1 \Leftrightarrow 1 > \dfrac{2n-1}{2n}$ $\qquad (2)$

De (1) y (2) se tiene: $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2n-1}{2n} < 1$, ahora dando valores a n, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} < 1$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{2n-1}{2n} < 1$$

multiplicando miembro a miembro estas desigualdades, se obtiene

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n}} < 1$$

37. Si $n \geq 2$, demostrar que

$$[\tfrac{1}{2}(n+1)]^n > n!$$

Demostración.

De inmediato $\dfrac{1+2+ \cdot \cdot \cdot \cdot +n}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot n} \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{2} > (n!)^{\frac{1}{n}}$

$\Leftrightarrow [\frac{1}{2}(n+1)]^n > n!$

38. Si $n, k \in \mathbb{N}$ y $n \geq k \geq 1$, demostrar que $(n!)^2 \geq n^n$

Demostración.

$n \geq k \ \wedge \ k-1 \geq 0 \ \Rightarrow \ n(k-1) \geq k(k-1) \ \Leftrightarrow \ nk - n \geq k^2 - k \ \Leftrightarrow$

$nk - k^2 + k \geq n \ \Leftrightarrow \ k(n-k+1) \geq n,$

de donde dando valores a k obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 \cdot n &\geq n \\ 2 \cdot (n-1) &\geq n \\ 3 \cdot (n-2) &\geq n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n-1 &\geq n \end{aligned}$$

multiplicando miembro a miembro estas desigualdades, se obtiene

$(1 \cdot 2 \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot n)\, n(n-1)(n-2) \cdot \ \cdot \ \cdot 2 \cdot 1 \geq n \cdot n \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot n \Leftrightarrow n!\, n! \geq n^n \Leftrightarrow$
$(n!)^2 \geq n^n$.

39. Si $n, r \in \mathbb{Z}^+$, demostrar que

$$\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^n < \left(1 + \tfrac{r}{n+1}\right)^{n+1}$$

Demostración.

Sea la sucesión: $a_1 = 1, a_2 = a_3 = , \ldots\ldots, a_{n+1} = 1 + \frac{r}{n}$

y aplicando $M.A. > M.G.$ se tiene

$$\frac{1 + \left(1 + \frac{r}{n}\right) + \left(1 + \frac{r}{n}\right) + \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ + \left(1 + \frac{r}{n}\right)}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(1 + \frac{r}{n}\right) \cdot \cdot \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + n\left(1 + \frac{r}{n}\right)}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \frac{1 + n + r}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{r}{n+1}\right)^{n+1}$$

40. Sean $a_1,\, a_2, \ldots\ldots, a_{20}$ reales positivos y S su suma. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{20} \frac{19S}{a_i - S} \leq -400$$

Demostración.

Aplicando $M.A. \geq M.G.$, como sigue a continuación

$$\frac{\frac{S-a_1}{S} + \frac{S-a_2}{S} + \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ + \frac{S-a_{20}}{S}}{20} \geq \frac{20}{\frac{S}{S-a_1} + \frac{S}{S-a_2} + \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot + \frac{S}{S-a_n}}$$

$$\frac{20S-(a_1+\ a_2+\ldots\ldots+a_{20})}{20S}\geq\frac{20}{\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\frac{S}{S-a_i}}$$

$$\frac{19S}{20S}\geq\frac{20}{\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\frac{S}{S-a_i}}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{20}\frac{S}{S-a_i}\geq\frac{400}{19}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{20}\frac{19S}{a_i-S}\leq-400$$

7.4. Ejercicios Propuestos

1. Para a y b números reales, averiguar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

   a) Si $a=2b\ \Rightarrow\ \frac{1}{4}a^2+b^2\ >\ ab$ b) Si $a<b\ \Rightarrow a<\frac{1}{4}(3a+b)<b$

   c) Si $a>0\wedge b>0\Rightarrow\frac{1}{2}(a+b)\ \geq\ \sqrt{ab}$ d) $a^2+b^2\geq 2\,ab$

Respuesta.

a) Falsa; b), c) y d) Son verdaderas.

2. Si a,b,c,d so reales positivos tales que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$. Demuestre que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

3. Si $a,b\in\mathbb{R}^+$, demuestre que $\sqrt{a+b}\ \leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

4. Si $a,b\in\mathbb{R}^+$ y distintos, demuestre

$$a^4+b^4>a^3b+ab^3$$

5. Sean a,b,c reales positivos, demuestre que:

   a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$

   b) $a^3+\dfrac{1}{a^3}\geq a+\dfrac{1}{a}\geq 2$

   c) $(a+b-c)^2\geq 4(ab-bc-ca)$

   d) $(a-b+c)(b+c-a)\leq c^2$

6. $\forall\, a>0$, demuestre que $a^3+\dfrac{1}{a^3}\geq a^2+\dfrac{1}{a^2}$

7. $\forall\, a\in\mathbb{R}$, demuestre que:

a) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} > 2$ b) $\dfrac{a^2}{1+a^4} \leq \dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{a-4}{(a-1)^2} \leq \dfrac{1}{2}$

8. Si a, b, c reales positivos, demuestre que:

   a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

   b) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

   c) $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2 \geq ab+bc+ca$

   d) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 6abc$

   e) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leq 2(a^3+b^3+c^3)$

   f) $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$

   g) $a+b+c \geq \dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{2bc}{b+c}+\dfrac{2ca}{c+a}$

9. Si a, b, c, d reales positivos, demuestre que:

   a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a} \geq 4$

   b) $cd(a+b)^2 \leq (ad+bc)(ac+bd)$

   c) $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$

   d) $(a+b+c+d)^3 \leq 16(a^3+b^3+c^3+d^3)$

   e) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geq 81abcd$

10. Si a, b, c, d son reales positivos tales que, $S=a+b+c+d$ demuestre que

$$81\,abcd \leq (S-a)(S-b)(S-c)(S-d)$$

11. Si $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=1,$ demuestre que

$$ax+by+cz \leq 1$$

12. Si a y b son reales positivos tales que $a+b=1$, demuestre que

   i) $4ab \leq 1$

   i) $a^4+b^4 \geq \dfrac{1}{8}$

   iii) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \geq \dfrac{25}{2}$

13. Si $a > 0$, demostrar que

$$log\, a \leq n\big(\sqrt[n]{a} - 1\big)$$

14. Si Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestre que

$$2(a^9 + b^9) \geq (a^4 + b^4)(a^5 + b^5)$$

15. Si a, b, c reales positivos tales que la suma de sus cuadrados sea 8, entonces

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 16\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

16. Si a, b, c reales positivos tales que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero, demuestre

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \;\geq\; abc$$

17. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

    a) $1 \cdot 2 \cdot \; \cdot \; \cdot \; n \leq (\frac{n+1}{2})^n$ b) $1 \cdot 2 \cdot \; \cdot \; \cdot \; n \leq 2\, (\frac{n}{2})^{n+1}$

18. Demostrar que para todo entero positivo se tiene:

    a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

    b) $2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$

19. Si a, b, c están en $P.H.$, demostrar

$$[\,\frac{a + b}{2a - b} + \frac{c + b}{2c - b}] > 4$$

20. Pruebe las siguientes desigualdades, para todo x, y reales:

    a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

    b) $x^{2n} + x^{2n-1}y + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; + x\, y^{2n-1} + y^{2n} \geq 0,\; n \in \mathbb{N}$

    c) $(x + y)^7 \leq 64\, (x^7 + y^7)$

21. Si la suma de n números positivos es constante, demostrar que su producto es máximo cuando dichos números son iguales.

22. Si $a + b + c = 1$ con a, b, c reales positivos. Demuestre que

    a) $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc$

    b) el mínimo valor de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ es 9.

23. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; demuestre que

$$\frac{1}{2}(n+1) < (1^1 \cdot 2^2 \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}} < \frac{1}{3}(2n+1)$$

Ayuda: Aplique $M.A. > M.G. > M.H.$ a los números

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3, \ldots, n,\ n,\ \ldots, n$$

24. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; demuestre que

$$2^{2n} > 3n \cdot 2^{n-1} + 1$$

Ayuda: aplique $M.A. > M.G.$ a los números

$$4,\ 4^2,\ 4^3,\ \ldots, 4^n$$

25. Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$$

Ayuda: ocupe el teorema del binomio

7.5. Inecuaciones

Definición 1

Una inecuación es una relación de desigualdad para una o más variables reales, que puede ser verdadera o falsa según sean los valores que puedan tomar dichas variables.

Nota 1.

En este texto solo abordaremos las inecuaciones con una variable real, eventualmente lo haremos también con dos variables.

Notación.

Una inecuación de una variable real la denotaremos por:

$$f(x) \geq 0 \ \vee \ f(x) > 0 \ \vee \ f(x) \leq 0 \ \vee \ f(x) < 0$$

De la solución.

Supongamos una inecuación de la forma $\qquad f(x) \geq 0 \qquad (1)$

Resolver esta inecuación es, determinar un conjunto de números reales para los cuáles (1) sea verdadera.

Por tanto $x = a$, con $a \in \mathbb{R}$ es solución de (1) si y solo si $f(a) \geq 0$

Definición 2

Dos inecuaciones son equivalentes si y solo si toda solución de una de ellas es solución de la otra.

Teorema 1

Las inecuaciones:

a) $f(x) \geq g(x) \quad \wedge \quad f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x)$

b) $f(x) \geq g(x) \quad \wedge \quad f(x)\, h(x) \geq g(x)\, h(x),$ con $h(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) \geq g(x) \quad \wedge \quad f(x)\, h(x) \leq g(x)\, h(x),$ con $h(x) < 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $|f(x)| \leq g(x) \quad \wedge \quad -g(x) \leq f(x) \leq g(x),$ con $g(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

e) $|f(x)| \geq g(x) \quad \wedge \quad \{\, f(x) \leq -g(x) \vee f(x) \geq g(x)\, \}$

son equivalentes.

Demostración.

Se dejan propuestas.

Observación 1

En general, tal como para las ecuaciones no hay un método único para resolver una inecuación, todo depende de la destreza algebraica y de la aplicación adecuada de los teoremas y definiciones precedentes.

Nota 2.

Las inecuaciones conteniendo **módulos** se resuelven aplicando la definición de módulo y en algunos casos aplicando el teorema precedente incisos d) o e).

Método de los puntos críticos.

Una gran parte de las inecuaciones que resolveremos lo haremos por el siguiente método, el cuál hemos llamado **método de los puntos críticos** para el que, daremos el siguiente algoritmo.

Resolver: $f(x) \geq 0 \quad \vee \quad f(x) > 0 \quad \vee \quad f(x) \leq 0 \quad \vee \quad f(x) < 0$

1) Se determinan los puntos críticos de $f(x)$.

Se dice que x_0 es un punto crítico de $f(x)$ si y solo si $f(x_0) = 0 \lor f(x_0)$ no existe.

2) Se ordenan todos los puntos críticos obtenidos en el eje real.

Si es el caso de un punto crítico de: $f(x) \geq 0 \lor f(x) \leq 0$ tal que $f(x_0) = 0$ dicho punto debe considerarse en la solución.

Si es el caso de un crítico de: $f(x) > 0 \lor f(x) < 0$, estos aparecen en el eje real como referencia, no deben estar en la solución.

Si es un punto crítico tal que $f(x_0)$ no existe, dicho punto en ningún caso debe considerarse en la solución.

3) Se determinan los signos de $f(x)$, en los intervalos determinados entre puntos críticos.

4) Si la inecuación en cuestión es: $f(x) \geq 0 \lor f(x) > 0$ la solución se encuentra en los intervalos señalados con signo $(+)$.

Si la inecuación en cuestión es: $f(x) \leq 0 \lor f(x) < 0$ la solución se encuentra en los intervalos señalados con signo $(-)$.

Debe considerarse para la solución lo expuesto en el inciso 2).

Inecuaciones de 2° grado

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ y su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

y sean también x_1 y x_2 sus raíces reales. $(x_1 < x_2)$

I) $a > 0 \land \Delta > 0$; i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \lor x > x_2$

ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

II) $a > 0 \land \Delta = 0$; i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x_1 = x_2$

ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ Ningún x.

III) $a > 0 \land \Delta < 0$; i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ Ningún x.

IV) $a < 0 \land \Delta > 0$; i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_1 \lor x > x_2$

V) $a < 0 \land \Delta = 0$; i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ Ningún x.

ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x_1 = x_2$

VI) $a < 0 \land \Delta < 0$; i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ Ningún x.

ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

7.6. Ejercicios Resueltos

1. Resolver en $\mathbb{Z}$,

$$\frac{7x+2}{4} - 1 < \frac{2x+5}{2} + x$$

Solución.

$7x + 2 - 4 < 4x + 10 + 4x \Leftrightarrow 7x - 2 < 8x + 10 \Leftrightarrow x > -12$

luego la solución en $\mathbb{Z}$, resulta: $\{-11, -10, -9, \dots\}$

2. Resolver en $\mathbb{R}$, el sistema:

$$8x - 5 > \frac{15x-8}{2} \qquad (1)$$

$$2(2x-3) > 5x - \frac{3}{4} \qquad (2)$$

Solución.

Resolvemos (1) y (2) en forma independiente y sus soluciones se intersecan entre si, en efecto:

$(1):\quad 16x - 10 > 15x - 8 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow S_1 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 2\}$

$(2):\quad 16x - 24 > 20x - 3 \Leftrightarrow x < -\frac{21}{4} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < -\frac{21}{4}\}$

luego Sol. $= S_1 \cap S_2 = \emptyset$

3. Resolver en $\mathbb{R}$, el sistema de 5 inecuaciones:

$$\frac{1}{x} > \frac{3}{x} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{3} - 1 < 2 - \frac{x}{2} \qquad (2)$$

$$1 + \frac{1}{5}(x-1) > 0 \qquad (3)$$

$$0 > \frac{1}{7}(x-1) - \frac{1}{9}(x+1) \qquad (4)$$

$$-\frac{7}{3}x \leq \frac{3}{7} + x \qquad (5)$$

Solución.

$(1): \ \frac{1}{x} > \frac{3}{x} \Leftrightarrow x > 3x \Leftrightarrow \ x < 0;$ note que se ha multiplicado por $x^2 > 0$

$(2): \ \frac{x}{3} - 1 < 2 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x - 6 < 12 - 3x \Leftrightarrow x < \frac{18}{5}$

$(3): \ 1 + \frac{1}{5}(x-1) > 0 \Leftrightarrow 5 + x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -4$

$(4): \ 0 > \frac{1}{7}(x-1) - \frac{1}{9}(x+1) \Leftrightarrow 0 > 9x - 9 - 7x - 7 \Leftrightarrow x < 8$

$(5): \ -\frac{7}{3}x \leq \frac{3}{7} + x \Leftrightarrow -49x \leq 9 + 21x \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{70}$

luego intersecando estas soluciones, resulta $S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -\frac{9}{70} \leq x < 0\}$

4. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 1) \geq 0$

b) $|x^2 - 1|(2x - x^2) \leq 0$

c) $\frac{2x}{x^2 + 3x} - \frac{2}{x} > 4$

d) $\frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x^3 - 1} \leq 0$

e) $\frac{x^2 + 3}{x^2 + 4x + 5} < 1 \leq \frac{3}{1 - x}$

Solución.

a) Como $x^2 + 1 > 0$ esto obliga a que $(x^2 - 3x - 4) \geq 0$ sus puntos críticos son

-1 y $4 \Rightarrow$ $\underset{\quad\quad -1 \quad\quad\quad 4}{\underline{+ \ + \ \bullet \ - \ - \ \bullet \ + \ +}}$ $\Rightarrow$ Sol. $= (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$.

b) Tambien como $|x^2 - 1| \geq 0 \Rightarrow (2x - x^2) \leq 0 \Rightarrow$ $\underset{\quad\quad 0 \quad\quad\quad 2}{\underline{- \ - \ \bullet \ + \ + \ \bullet \ - \ -}}$

Sol. $= (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \cup \{1\}$

Notemos que en la solución hemos incluído al 1, pués el módulo tambien se se anula para él y en la solución indicada no está indicado.

c) Efectuando operaciones algebraicas se obtiene $\frac{4x^2+12x+5}{x^2+3x} < 0$ sus puntos críticos son : $-3, \ -\frac{5}{2}, \ -\frac{1}{2}$ y $0 \Rightarrow$ $\underline{+ \ + \ \circ \ - \ - \ \circ \ + \ + \ \circ \ - \ - \ \circ \ + \ +}$

$$-3 \qquad -\tfrac{5}{2} \qquad -\tfrac{1}{2} \qquad 0$$

$\Rightarrow$ Sol. $= \left(-3, -\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

d) Efectuando operaciones algebraicas se obtiene $\dfrac{x(2x-1)}{x^3-1} \leq 0$ sus puntos críticos son: $0, \dfrac{1}{2}$ y $1 \Rightarrow$ $\underline{- - \bullet + + \bullet - - \circ + +}$ $\Rightarrow$

$$0 \qquad \tfrac{1}{2} \qquad 1$$

Sol. $= (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, 1)$.

e) Primero resolvemos $\dfrac{x^2+3}{x^2+4x+5} < 1$ y luego $1 \leq \dfrac{3}{1-x}$, para luego intersecar sus soluciones.

De la primera inecuación se tiene $\dfrac{2(2x+1)}{x^2+4x+5} > 0$ único crítico $-\dfrac{1}{2}$,

pues x^2+4x+5 es siempre positivo $(\Delta < 0)$ por tanto, Sol.$(1) = (-\dfrac{1}{2}, \infty)$

Para la segunda inecuación $\dfrac{x+2}{1-x} \geq 0 \Rightarrow$ $\underline{- - \bullet + + \circ - -}$ $\Rightarrow$

$$-2 \qquad 1$$

Sol.$(2) = [-2, 1)$

Finalmente intersecando la solución (1) y (2) se obtiene, Sol. $= (-\dfrac{1}{2}, 1)$.

5. Resolver en $\mathbb{R}$, el sistema:

$$x - 1 > \sqrt{x+1} \qquad (1)$$

$$\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} \leq 5 \qquad (2)$$

Solución.

(1) : Las condiciones previas antes de elevar al cuadrado son:

$(x - 1 > 0 \ \wedge \ x + 1 > 0) \Leftrightarrow (x > 1 \wedge x > -1) \Leftrightarrow x > 1 \qquad (*)$

Bajo esta condición y elevando al cuadrado resulta $x^2 - 2x + 1 > x + 1 \ \Leftrightarrow$

$x(x-3) > 0 \Rightarrow$ $\underline{+ + \circ - - \circ + +}$ $\Rightarrow (x < 0 \vee x > 3)$ intersecando con

$$0 \qquad 3$$

$(*)$ resulta $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 3\}$

(2) : Después de las simplificaciones correspondientes obtenemos

$$\frac{(x-2)(5x+3)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \;\Rightarrow\; \underset{-1 \quad -\frac{3}{5} \qquad 1 \qquad 2}{\underline{+\ +\circ-\ -\bullet+\ +\circ-\ -\bullet+\ +}} \;\Rightarrow$$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < -1 \vee -\dfrac{3}{5} \leq x < 1 \vee x \geq 2\}$

De donde Sol. $= S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > 3\}$.

6. Determine los signos de

$$f(x) = \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1}$$

Solución.

Note que $f(x) = \dfrac{3(x-2)}{(x+2)(x-1)}$ los signos de f se refiere a; para que valores de x: $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ por tanto se tiene de

$$\underset{-2 \qquad 1 \qquad 2}{\underline{-\ -\circ+\ +\circ-\ -\bullet+\ +}} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (-2 < x < 1 \vee x \geq 2); \\ f(x) < 0 \Leftrightarrow (x < -2 \vee 1 < x < 2) \end{array}$$

7. Resolver

a) $\left|\dfrac{2x-1}{6-x}\right| = 4$

b) $\left|\dfrac{2x-1}{6-x}\right| \leq 4$

c) $|x-1| - 2x > |x+3|$

Solución.

a) $\dfrac{2x-1}{6-x} = 4 \vee \dfrac{2x-1}{6-x} = -4$ de donde se obtiene $x = \dfrac{25}{6} \vee x = \dfrac{23}{2}$

b) $\left|\dfrac{2x-1}{6-x}\right| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \dfrac{2x-1}{6-x} \leq 4 \Rightarrow$

$\dfrac{2x-1}{6-x} \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{6x-25}{6-x} \leq 0 \Rightarrow$ Sol.$(1) = (-\infty, \dfrac{25}{6}] \cup (6, \infty)$

$-4 \leq \dfrac{2x-1}{6-x} \Leftrightarrow \dfrac{23-2x}{6-x} \geq 0 \Rightarrow$ Sol.$(2) = (-\infty, 6] \cup (\dfrac{23}{2}, \infty)$, luego

Sol $=$ Sol$(1) \cap$ Sol.$(2) = (-\infty, \dfrac{25}{6}] \cup (\dfrac{23}{2}, \infty)$.

c) Puntos críticos de los módulos -3 y 1, luego

$\forall\, x \leq -3 \Rightarrow -(x-1) - 2x > -(x+3) \Rightarrow x < 2$, luego

$(x \leq -3 \wedge x < 2) \Rightarrow$ Sol.$(1) = (-\infty, -3]$

$\forall\; -3 < x \leq 1 \Rightarrow -(x-1) - 2x > x+3 \Rightarrow x < -\dfrac{1}{2}$, luego

$\left(-3 < x \leq 1 \wedge x < -\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$ Sol.$(2) = (-3, -\dfrac{1}{2}]$

$\forall\, x > 1 \Rightarrow (x-1) - 2x > (x+3) \Rightarrow x < -2$, luego la intersección de éste tramo es vacía.

Finalmente la solución es Sol.$(1) \cup$ Sol.$(2) = (-\infty, -\dfrac{1}{2}]$.

8. Hallar los reales x, tales que

$$1 < \left|\frac{x+5}{x-2}\right| < 3$$

Solución.

I. $\left|\dfrac{x+5}{x-2}\right| < 3 \Leftrightarrow -3 < \dfrac{x+5}{x-2} < 3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+5}{x-2} < 3 \wedge -3 < \dfrac{x+5}{x-2}\right)$

$(1): \frac{x+5}{x-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x-2} < 0 \Rightarrow \underset{\quad 2 \qquad \frac{11}{2}}{\underline{-\;-\circ+\;+\bullet-\;-}} \Rightarrow (x < 2 \vee x > \frac{11}{2}) \quad (S_1)$

$(2): -3 < \frac{x+5}{x-2} \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x-2} > 0 \Rightarrow \underset{\quad \frac{1}{4} \qquad 2}{\underline{+\;+\circ-\;-\circ+\;+}} \Rightarrow (x < \frac{1}{4} \vee x > 2) \quad (S_2)$

luego: Sol.(I) $= S_1 \cap S_2 = (-\infty, \dfrac{1}{4}) \cup (\dfrac{11}{2}, \infty)$

II. $\left|\dfrac{x+5}{x-2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+5}{x-2} < -1 \vee \dfrac{x+5}{x-2} > 1\right)$

$(3): \dfrac{x+5}{x-2} < -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-2} < 0 \Rightarrow \underset{\quad -\frac{3}{2} \qquad 2}{\underline{+\;+\circ-\;-\circ+\;+}} \Rightarrow (-\dfrac{3}{2} < x < 2) \quad (S_3)$

$(4): \dfrac{x+5}{x-2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{7}{x-2} > 0 \Rightarrow (x > 2) \quad (S_4)$

Por tanto: Sol.(II) $= S_3 \cup S_4 = (-\dfrac{3}{2}, 2) \cup (2, \infty)$, Finalmente Sol. Final $=$ Sol.$(\mathrm{I}) \cap$ Sol.$(\mathrm{II}) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{11}{2}, \infty)$.

9. Resolver el sistema:

$$\left|\frac{x-2}{x+3} + \frac{x-2}{3x-x^2}\right| < \frac{1}{3} \qquad (1)$$
$$\frac{(2x+1)x-1}{x^2-5x+6} > \frac{1}{x-2} \qquad (2)$$

Solución.

$(1): \left|\frac{x-2}{x+3} + \frac{x-2}{3x-x^2}\right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \frac{x-2}{x+3} + \frac{x-2}{3x-x^2} < \frac{1}{3}$ de donde

I. $\frac{x-2}{x+3} + \frac{x-2}{3x-x^2} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2(x^2-3x-3)}{3x(x+3)} < 0$, puntos críticos:

$-3,\ -0.79,\ 0$ y 3.79 luego; $\underset{-3 \quad -0.79 \quad\quad 0 \quad\quad 3.79}{\underline{+\ +\circ-\ -\circ+\ +\circ-\ -\circ+\ +}} \Rightarrow$

Sol.$(\mathrm{I}) = (-3, -0.79) \cup (0, 3.79)$.

II. $-\frac{1}{3} < \frac{x-2}{x+3} + \frac{x-2}{3x-x^2} \Leftrightarrow \frac{4x^2-6}{3x(x+3)} > 0$, puntos críticos: $-3,\ -\sqrt{\frac{3}{2}}$,
$0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}$ luego; $\underset{-3 \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad\quad 0 \quad\quad \sqrt{\frac{3}{2}}}{\underline{+\ +\circ-\ -\circ+\ +\circ-\ -\circ+\ +}} \Rightarrow$

Sol.$(\mathrm{II}) = (-\infty, -3) \cup (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$

Así: Sol. $(1) =$ Sol.$(\mathrm{I}) \cap$ Sol.$(\mathrm{II}) = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, -0.79) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, 3.79)$.

$(2): \frac{(2x+1)x-1}{x^2-5x+6} > \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2(x^2+1)}{(x-2)(x-3)} > 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) > 0$
pués $x^2+1 > 0$ por tanto $\underset{2 \quad\quad 3}{\underline{+\ +\circ-\ -\circ+\ +}} \Rightarrow$ Sol.$(2) = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

Luego: Sol.Final $=$ Sol.$(1) \cap$ Sol.$(2) = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, -0.79) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, 2) \cup (3, 3.79)$.

10. Probar que la inecuación

$$|x-5| + |1-x| < 4$$

no tiene solución.

Prueba.

Aplicando la definición de módulo, considerando los puntos críticos 1 y $5,$ se tiene:

Si $x < 1 \Rightarrow -(x-5)+(1-x) < 4 \Leftrightarrow -2x+6 < 4 \Leftrightarrow x > 1$ con lo que en este caso no hay solución posible pués se contradice con la condición inicial.

Si $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -(x-5)-(1-x) < 4 \Leftrightarrow 4 < 4,$ que no es posible.

Si $x > 5 \Rightarrow (x-5)-(1-x) < 4 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5,$ también contradicción.

luego se h a probado que la inecuación no tiene solución.

11. Hallar los valores de $k,$ que hacen reales las raíces de la ecuación

$$kx^2 - 2(k+1)x + k - 1 = 0$$

Solución.

Para obtener raíces reales, debe cumplirse que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$ de donde

$4(k+1)^2 - 4(k-1)k \geq 0 \Leftrightarrow 3k+1 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{1}{3}$

12. Determine los valores de m de modo que: $f(x) = mx^2 - m(m-1)x + 2m,$ sea negativo $\forall\, x \in \mathbb{R}.$

Solución.

$f(x) < 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\, a < 0 \ \wedge \ \Delta < 0),$ si $f(x) = ax^2 + bx + c$ por tanto:

$m < 0 \quad (1), \ \wedge \ m^2(m-1)^2 - 8m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2(m^2 - 2m - 7) < 0,$ como $m^2 > 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 7 < 0$ puntos críticos: $1 - 2\sqrt{2}$ y $1 + 2\sqrt{2}$ luego

$\underset{1-2\sqrt{2} \quad\quad 1-2\sqrt{2}}{\underline{+\ +\circ -\ \ -\circ +\ +}} \Rightarrow (\,1 - 2\sqrt{2} < m < 1 + 2\sqrt{2}\,) \quad (2),$

Intersecando (1) y (2) obtenemos $\{\, m \in \mathbb{R} \ / \ 1 - 2\sqrt{2} < m < 0\,\}.$

13. Hallar los valores de m para que la expresión

$$(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m > 3$$

se cumpla $\forall\, x \in \mathbb{R}.$

Solución.

Se debe tener que $(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m - 3 > 0, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

Si $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-3)x + m - 3$ entonces $(a > 0 \ \wedge \ \Delta < 0)$ luego

$m-1>0 \Leftrightarrow m>1 \ (1), \ \wedge \ 4(m-3)^2-4(m-1)(m-3)<0 \ \Leftrightarrow$

$-2(m-3)<0 \Leftrightarrow m>3 \ (2),$

Intersecando (1) y (2) obtenemos $\{m \in \mathbb{R} \ / \ m>3\}$.

14. Resolver el sistema:

$$\frac{x^2-1}{x^2-6x-10} \le 1 \quad (1)$$
$$log_{10}\left(x^2-2x+2\right) < 1 \qquad (2)$$

Solución.

$(1): \dfrac{x^2-1}{x^2-6x-10} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{6x+9}{x^2-6x-10} \le 0 \Rightarrow$

puntos críticos: $-\dfrac{3}{2}, 3-\sqrt{19}, 3+\sqrt{19} \ \Rightarrow \ \underset{-\frac{3}{2} \qquad 3-\sqrt{19} \qquad 3+\sqrt{19}}{\underline{- \ - \bullet + \ + \ + \circ - \ - \circ + \ +}} \ \Rightarrow$

Sol.$(1) = (-\infty, -\dfrac{3}{2}] \cup (3-\sqrt{19}, 3+\sqrt{19})$

$(2): log_{10}(x^2-2x+2)<1 \Leftrightarrow x^2-2x+2<10$ solo si $x^2-2x+2>0$

$x^2-2x+2<10 \Leftrightarrow x^2-2x-8<0 \Rightarrow$ puntos críticos: $-2, 4$ luego

$\underset{-2 \qquad\quad 4}{\underline{+ \ + \circ - \ - \circ + \ +}} \ \Rightarrow (-2,4) \ (\alpha)$; y $x^2-2x+2>0, \forall x \in \mathbb{R} \ (\beta)$ pués

$(a>0 \ \wedge \ \Delta<0)$ por tanto Sol.$(2) = (\alpha) \cap (\beta) = (-2,4)$.

finalmente Sol. $=$ Sol.$(1) \cap$ Sol.$(2) = (-2, -\dfrac{3}{2}] \cup (3-\sqrt{19}, 4)$.

15. Para que valores de k, la ecuación

$$(k-2)x^2+2(k-2)x+2k-1=0$$

tendrá al número 1, en el intervalo determinado por sus raíces.

Solución.

Sea $f(x)=(k-2)x^2+2(k-2)x+2k-1$ concretamente se pueden dar dos casos:

I) $k-2>0 \ \wedge \ f(1)<0$ II) $k-2<0 \ \wedge \ f(1)>0$

I) $k>2 \ \wedge \ 5k-7<0 \ \Leftrightarrow \ k>2 \ \wedge \ k<\frac{7}{5}$, caso que no da solución.

II) $k < 2 \;\; \wedge \;\; 5k - 7 > 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{7}{5} < k < 2,$ que és la solución.

16. Resolver

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} \geq \dfrac{x + 4}{x + 3}$

b) $\dfrac{x^3\left(x^2 - \frac{1}{7}\right)}{\sqrt{2}(x^2 + 1) + x^4 + x^2} < \dfrac{x(7x^2 - 1)}{(x^2 + 1)\left(x^2 + \sqrt{2}\right)}$

Solución.

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} \geq \dfrac{x + 4}{x + 3} \Leftrightarrow \dfrac{x + 10}{(x - 4)(x + 3)} \geq 0,$ puntos críticos: $-10, \; -3, 4$

$$\Rightarrow \;\; \underset{-10}{\underline{- \; - \bullet}} \underset{-3}{\underline{+ \; + \circ}} \underset{4}{\underline{- \; - \circ}} \underline{+ \; +} \;\; \Rightarrow \quad \text{Sol.} = [-10, \; -3) \cup (4, \infty)$$

b) $\dfrac{x^3\left(x^2 - \frac{1}{7}\right)}{\sqrt{2}(x^2 + 1) + x^4 + x^2} < \dfrac{x(7x^2 - 1)}{(x^2 + 1)\left(x^2 + \sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2 - 7)(x^2 - \frac{1}{7})}{(x^2 + 1)\left(x^2 + \sqrt{2}\right)} < 0$

Puntos críticos: $0, \; -\sqrt{7}, \; -\sqrt{\frac{1}{7}}, \; \sqrt{\frac{1}{7}}, \; \sqrt{7}$ por tanto resulta

$$\underset{-\sqrt{7}}{\underline{- \; - \circ}} \underset{-\sqrt{\frac{1}{7}}}{\underline{+ \; + \circ}} \underset{0}{\underline{- \; - \circ}} \underset{\sqrt{\frac{1}{7}}}{\underline{+ \; + \circ}} \underset{\sqrt{7}}{\underline{- \; - \circ}} \underline{+ \; +} \;\; \Rightarrow$$

Sol. $= (-\infty, \; -\sqrt{7}) \cup (-\sqrt{\frac{1}{7}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{1}{7}}, \; \sqrt{7})$

17. Para que valores de m las raíces de la ecuación $\dfrac{x^2 - 3x}{2x - 1} = \dfrac{m - 1}{m + 1}$ tiene:

a) Raíces reales y distintas.

b) Raíces reales y ambas positivas.

c) Raíces reales de signo contrario, siendo negativa la mayor en valor absoluto.

Solución.

a) Notemos que la ecuación es igual a: $(m + 1)x^2 - (5m + 1)x + (m - 1) = 0$

Para que la ecuación dada tenga raíces reales y distintas se debe tener $(a \neq 0$ $\wedge \; \Delta > 0)$, por tanto:

$$a = m + 1 \neq 0 \; \Leftrightarrow m \neq \; -1; \; \Delta = (5m + 1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0 \; \Leftrightarrow$$

$21m^2+10m+5=0 \Rightarrow \Delta = -320 \Rightarrow$ La ecuación siempre tiene raíces reales, luego solo $m \neq -1$.

b) Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación, considerando a) se tiene $m \neq -1$

y $\left(x_1x_2 = \dfrac{m-1}{m+1} > 0 \ \wedge \ x_1+x_2 = \dfrac{5m+1}{m+1} > 0\right)$ de donde se obtienen:

$(m < -1 \ \vee \ m > 1) \ \wedge \ (m < -1 \ \vee \ m > -\dfrac{1}{5}) \Leftrightarrow (m < -1 \ \vee \ m > 1)$

c) Además de $m \neq -1$, siendo x_1, x_2 las raíces de la ecuación, entonces:

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m-1}{m+1} < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$

$x_1 + x_2 = \dfrac{5m+1}{m+1} < 0 \Rightarrow -1 < m < -\dfrac{1}{5}$, así resulta: $-1 < m < -\dfrac{1}{5}$

18. Resolver el sistema:

$$\frac{|x-1|-|2x+3|}{3x-4} \geq 0 \qquad (1)$$

$$|x^2-x|+x > 1 \qquad (2)$$

Solución.

(1) : Podemos considerar dos casos: i) $|x-1|-|2x+3| \geq 0 \ \wedge \ 3x-4>0$

ii) $|x-1|-|2x+3| \leq 0 \ \wedge \ 3x-4<0$

i) Notemos que si $3x-4>0 \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{3} \Rightarrow (x-1)-(2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$

$(x > \dfrac{4}{3} \wedge x \leq -4) \Rightarrow \emptyset$ por tanto Sol(i) $= \emptyset$.

ii) $|x-1| \leq |2x+3|$ elevando al cuadrado se recibe $3x^2+14x+8 \geq 0$,

puntos críticos -4 y $-\frac{2}{3} \Rightarrow \underset{\quad -4 \qquad -\frac{2}{3}}{\underline{+ \ + \bullet - \ - \bullet + \ +}} \Rightarrow (x \leq -4 \vee x \geq -\frac{2}{3})$

intersecando con $x < \dfrac{4}{3}$ resulta Sol(ii) $= (-\infty, -4] \cup [-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3})$

Luego Sol.$(1) =$ Sol(i) $\cup$ Sol(ii) $= (-\infty, -4] \cup [-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3})$.

(2) : $|x^2-x|+x > 1 \Leftrightarrow |x^2-x| > 1-x \Leftrightarrow$

$(x^2-x < x-1 \ \vee \ x^2-x > 1-x) \Leftrightarrow [\,(x-1)^2 < 0 \ \vee \ x^2-1 > 0\,]$ la primera inecuación conduce a $\emptyset$, y la segunda a $(x < -1 \vee x > 1)$,

por tanto: Sol.$(2) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Finalmente, Sol. Final $=$ Sol.$(1) \cap$ Sol.$(2) = (-\infty, -4] \cup (1, \frac{4}{3})$.

19. Para que valores de x los trinomios $f(x) = x^2 - x - 6$ y $g(x) = x^2 - 5x + 4$ tienen distinto signo.

Solución.

Se debe tener $f(x)\,g(x) < 0 \Rightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 5x + 4) < 0 \Leftrightarrow$
$(x+2)(x-3)(x-1)(x-4) < 0$, puntos críticos: $-2,\ 1,\ 3$ y $4 \Rightarrow$

$\underset{\quad -2 \qquad 1 \qquad 3 \qquad 4}{\underline{+\ +\circ-\ -\circ+\ +\circ-\ -\circ+\ +}} \Rightarrow$ Sol. $= (-2, 1) \cup (3, 4)$.

20. Sean $f(x) = \sqrt{|x| - x}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$ dos funciones definidas en $\mathbb{R}$. Encuentre el dominio de $g \circ f$.

Solución.

De inmediato $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\big(\sqrt{|x| - x}\big)$ lo que exige, que $\sqrt{|x| - x} \geq 0 \Rightarrow |x| - x \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq x \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}$, luego

$g\big(\sqrt{|x| - x}\big) = \sqrt{\sqrt{|x| - x} - 1}$, de aquí se debe tener $\sqrt{|x| - x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{|x| - x} \geq 1$, como ambos términos son positivos podemos elevar al cuadrado,

obteniendose $|x| \geq 1 + x \Leftrightarrow (x \leq -(1 + x) \vee x \geq 1 + x)$, de la primera

inecuación se tiene $x \leq -\frac{1}{2}$ y la segunda inecuación no aporta más soluciones,

por tanto el Dom.$f = \{x \in \mathbb{R} \ /\ x \leq -\frac{1}{2}\}$.

21. Determine el recorrido de la función f, definida por $f(x) = \dfrac{2}{|x| - 1}$, $\forall\, x \neq \pm 1$

Solución.

Como, $y = \dfrac{2}{|x| - 1} \Leftrightarrow |x| = \dfrac{2 + y}{y}$, pero como $|x| \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$; entonces

$\dfrac{2 + y}{y} \geq 0$, puntos críticos: $-2,\ 0 \Rightarrow \underline{+\ +\bullet-\ -\circ+\ +} \Rightarrow$

$-2 \qquad 0$

Rec.$f = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \leq -2 \ \vee \ y > 0\}$.

22. Resolver

$$|x^2 - x| + |x| - |x-1| \geq 0$$

Solución.

La inecuación se puede expresar como $|x||x-1| + |x| - |x-1| \geq 0$, puntos críticos para aplicar la definición de módulo, son: 0 y 1.

Para $x \leq 0 \Rightarrow (-x)[-(x-1)] - x + (x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\underset{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\underline{+ \ + \bullet - \ - \bullet + \ +}} \ \Rightarrow (x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ pero como $x \leq 0$ entonces

queda $x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (1);

Para $0 < x \leq 1 \Rightarrow x(1-x) + x + x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Rightarrow$

$\underset{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\underline{+ \ + \bullet - \ - \bullet + \ +}} \ \Rightarrow [\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) < x < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})]$ pero como $0 < x \leq 1$

entonces queda $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \leq x \leq 1$ (2);

Para $x > 1 \Rightarrow x(x-1) + x - (x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq 0$ lo que es verdad $\forall \, x \in \mathbb{R}$, pués $a = 1 > 0 \ \wedge \ \triangle < 0$, luego solo queda $x > 1$ (3).

Finalmente uniendo (1), (2) y (3) se tiene Sol. $= (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

23. Determinar para que valores de k, se verifica

$$-3 < \frac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 1} < 2, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Solución.

$(1): \ -3 < \dfrac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \dfrac{4x^2 + (k-3)x + 1}{x^2 - x + 1} > 0$, ahora como

$x^2 - x + 1 > 0, \forall \, x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4x^2 + (k-3)x + 1 > 0$, se debe tener $(a > 0 \ \wedge$ $\Delta < 0)$ esto es $a = 4 > 0 \ \wedge \ \Delta = (k-3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (k-7)(k+1) < 0$,

de donde se obtiene Sol.$(1) = \{k \in \mathbb{R} \ / \ -1 < k < 7\}$.

$(2):\ \dfrac{x^2+kx-2}{x^2-x+1} < 2 \Rightarrow x^2-(k+2)x+4>0,$ se debe tener también

$(\,a>0 \wedge \Delta<0)$ por tanto $a=1>0\ \wedge \Delta=(k+2)^2-16<0 \Leftrightarrow$

$(k-2)(k+6)<0$ de donde $^{2}=\{k\in\mathbb{R}\ /\ -6<k<2\ \}.$

Finalmente Sol. Final = Sol.$(1) \cap$ Sol.$(1) = \ \{k\in\mathbb{R}\ /\ -1<k<2\ \}.$

24. Sean $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ x+2 & \text{si} \quad x<0 \vee x>1 \end{cases}$

Encuentre $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$.

Solución.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} f(\sqrt{x+1}) & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si} \quad \sqrt{x+1}\le 1 \\ x & \text{si} \quad \sqrt{x+1}>1 \end{cases} \\ f(x+2) & \text{si} \quad x<0 \vee x>1 \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x+2\le 1 \\ (x+2)^2-1 & \text{si} \quad x+2>1 \end{cases} \end{cases}$$

Ahora: $(0\le x\le 1 \ \wedge\ \sqrt{x+1}\le 1) \Rightarrow x=0$

$(0\le x\le 1 \ \wedge\ \sqrt{x+1}>1) \Rightarrow 0<x\le 1$

$(x<0 \vee x>1 \ \wedge\ x+2\le 1) \Rightarrow x\le -1$

$(x<0 \vee x>1 \ \wedge\ x+2>1) \Rightarrow -1<x<0 \vee x>1$

Luego queda;

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ x & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ x+2 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2+4x+3 & \text{si} \quad -1<x<0 \vee x>1 \end{cases}$$

Procediendo en forma análoga para $(g\circ f)$, se obtiene

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ x & \text{si} \quad 1<x\le\sqrt{2} \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>\sqrt{2} \end{cases}$$

25. Hallar el dominio de definición de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{4 - |1 + |x-1| + x|}$

b) $f(x) = \sqrt{Arcsen(log_2 x)}$

c) $f(x) = log_2 log_3 log_4 x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2^{Arcsen\, x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

e) $f(x) = \sqrt{cos(senx)} + Arcsen\, \dfrac{1+x^2}{2x}$

Solución.

a) Se debe tener que $4 - |1 + |x-1| + x| \geq 0 \iff |1 + |x-1| + x| \leq 4 \iff -4 \leq 1 + |x-1| + x \leq 4 \iff (-4 \leq 1 + |x-1| + x \;\wedge\; 1 + |x-1| + x \leq 4)$

$(1) : -4 \leq 1 + |x-1| + x \iff |x-1| \geq -(x+5) \iff$

$[x - 1 \leq -(x+5) \vee x - 1 \leq x + 5] \iff [x \geq -2 \;\vee\; -1 \leq 5] \iff$

Sol.$(1) = \mathbb{R}$

$(2) : 1 + |x-1| + x \leq 4 \iff |x-1| \leq 3 - x \iff -(3-x) \leq x - 1 \leq 3 - x \iff$

$(-3 \leq -1 \;\wedge\; x \leq 2) \Rightarrow$ Sol.$(2) = (-\infty, 2]$

Luego, Dom$f$ = Sol.$(1) \cap$ Sol.$(2) = (-\infty, 2]$

b) Se debe tener que $Arcsen(log_2 x) \geq 0 \iff 0 \leq log_2 x \leq 1 \iff 1 \leq x \leq 2$

c) La función $f(x)$ está definida para $log_3 log_4 x > 0$ de donde $log_4 x > 1 \iff$ $x > 4$, luego Dom$f = (4, \infty)$.

d) Debe satisfacerse simultaneamente : $x \neq 0$, $-1 \leq x \leq 1$ y $x - 2 > 0$ lo que nos dá como resultado el conjunto vacío.

e) Se debe tener en este caso; $(cos(senx) \geq 0 \;\wedge\; -1 \leq \dfrac{1+x^2}{2x} \leq 1)$ la primera condición se satisface $\forall x \in \mathbb{R}$, y la segunda para $|x| = 1$. Por tanto Dom$f = \{\pm 1\}$.

26. Hallar los intervalos en que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ crece y en los que decrece y sus valores máximo y mínimo.

Solución.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

Si $a > 0$, $f(x)$ aumentará para aquellos x tales que $x + \dfrac{b}{2a} > 0$, es decir $x > -\dfrac{b}{2a}$, y disminuirá para $x + \dfrac{b}{2a} < 0$, es decir $x < -\dfrac{b}{2a}$, de aquí que para $x = -\dfrac{b}{2a}$ la función $f(x)$ toma su valor mínimo. Note que para este caso $f(x)$ no tiene un valor máximo.

Analogamente, si $a < 0$, $f(x)$ aumenta para $x < -\dfrac{b}{2a}$ y disminuye para $x > -\dfrac{b}{2a}$ y en $x = -\dfrac{b}{2a}$ la función $f(x)$ toma su valor máximo.

27. Hallar el rectángulo de área máxima, entre todos los rectángulos de perímetro dado.

Solución.

Sea $2p$ la longitud del perímetro del rectángulo buscado, y x la longitud de uno de sus lados iguales.

Por tanto el Área A, viene dada por $A = x(p - x) = px - x^2$, o sea el problema se reduce a determinar el máximo de la función $A = px - x^2$, de inmediato por el problema anterior $a < 0 \Rightarrow A$, tiene un máximo para $x = -\dfrac{p}{2(-1)} = \dfrac{p}{2}$, y como $p - x = p - \dfrac{p}{2}$, luego el rectángulo de mayor área, para un perímetro dado es un cuadrado.

7.7. Ejercicios Propuestos

1. Resolver en $\mathbb{R}$,

a) $3(2 - x) + \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{4}(2x + 2) - 1$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq x(x - 5)$

c) $x^2 + 5x - 6 \leq 0$

d) $\dfrac{x + 2(3 - x)}{4x - 3} < 0$

e) $\dfrac{2x - 3}{x - 2} \geq 3$

f) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 3} \geq 0$

g) $1+\dfrac{15-7x}{x^2+x-6}\ >0$ h) $\dfrac{2x-3}{x^2+1}\ \leq\ -3$

Respuesta.

a) $x>2$ **b)** $[2,+\infty)$ **c)** $[-6,1]$ **d)** $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)\ \cup\ (6,+\infty)$ **e)** $(2,3]$

f) $x\leq 0\ \vee\ x\geq 2$ **g)** $x<\ -3\ \vee x>2$ con $x\neq 3$ **h)** $[\ -\frac{2}{3},0)$

2. Resolver en $\mathbb{R}$,

a) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-6}<8$ b) $x(x^4-7x^2+12)>0$

c) $1+\dfrac{6}{x^2+3x+2}>\dfrac{6}{x+2}$ d) $\dfrac{x(x^2-9)}{x+1}\leq 0$

e) $(x^2+3x-4)(x^2+8)\geq 0$ f) $1<\dfrac{3x-1}{x-3}<2$

g) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}-\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}\leq 0$

h) $\dfrac{2x-25}{x^2+2x-3}+\dfrac{2x+11}{x^2-1}>\dfrac{2}{x+3}$

Respuesta.

a) $x\geq 6$ **b)** $-2<x<\ -\sqrt{3}\ \vee\ \ 0<x<\sqrt{3}\ \vee x>2$

c) $x<\ -2\ \vee\ -1<x<1\ \vee\ x>2$ **d)** $0\leq x\leq 3\ \vee\ -3\leq x<\ -1$

e) $x\leq\ -4\ \vee\ x\geq 1$ **f)** $-5<x<\ -1$

g) $-1<x\leq\ -\frac{1}{2}\ \vee\ 1<x<2$ **h)** $-3\leq x<\ -1\ \vee\ x>1$

3. Resolver en $\mathbb{R}$,

a) $|\,2x-3\,|\geq 1$ b) $\left|\,\dfrac{x+2}{x+4}\right|\ <\ 2$ c) $-2<\ |\,x^2-3x\,|\ \leq 6$

d) $2\,|\,x-1\,|-|\,2+x\,|\ \geq 1$

Respuesta.

a) $x\leq 1\ \vee\ x\geq 2$, **b)** $x<\ -6\ \vee\ x>\ -\dfrac{10}{3}$, **c)** $-1\leq x\leq 4$,

d) $(-\infty,\ -\dfrac{1}{3})\cup[5,+\infty)$

4. Resolver en $\mathbb{R}$,

a) $|1-x|-x \geq 0$

b) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \leq 6$

c) $\left|\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-5x+6}\right| > \dfrac{1}{5}$

d) $|(x-2)^2-6| < 3$

e) $\left|\dfrac{x+2}{9-x}\right| < 1$

f) $|2x-4|+3 > x$

g) $1 < \left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| < 5$

h) $\dfrac{|x-2|-|3x+6|}{x-1} \geq 1$

i) $\dfrac{5-|x-2|}{x^2-1} \geq 5$

j) $\left|\dfrac{x-1}{x^2-2x}\right| \leq \dfrac{x}{x-2}$

k) $|x^2+4x-5| \leq |x^2+3x+6|$

l) $|x-3|+|x+2| \geq |x-1|$

Respuesta.

a) $(-\infty, \frac{1}{2}]$ **b)** $(3-\sqrt{8}, 3+\sqrt{8}) \cup (-3-\sqrt{8}, -3+\sqrt{8})$

c) $\mathbb{R}-\{2,3\}$ **d)** $(-1, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, 5)$ **e)** $(-\infty, \frac{1}{2})$

f) $(-\infty, \infty)$ **g)** $(-\dfrac{1}{2}, 1)$ **h)** $(-\infty, 9] \cup [-\dfrac{3}{5}, 1)$

i) $[\dfrac{1-\sqrt{161}}{10}, -1) \cup (1, \dfrac{1+\sqrt{161}}{10}]$ **j)** $(-\infty, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (2, \infty)$

k) $(-\infty, \dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}] \cup [\dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}, 11]$ **l)** $(-\infty, \infty)$

5. Resolver los sistemas siguientes

a) $\begin{array}{l} (x-1)(x+2) \geq 0 \\ 2x+1 > x^2-x \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x^2-2x-35 \geq 0 \\ x^2-2x-48 \leq 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x^2-3x+2 \geq 0 \\ \dfrac{x}{(x+2)^2} \leq 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} \dfrac{x^2-2}{x^2-6x+10} \leq 1 \\ \dfrac{(x^2-x+1)(x^2-4)(x-1)x}{(x+5)^2(x^3-1)(x^2-5x+6)} \geq 0 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} x^3+1 \leq x^2+x \\ -1 < \dfrac{3x+4}{x-7} \leq 1 \end{array}$

f) $\begin{array}{l} \sqrt{x+6} > \sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5} \\ x+|x| < 1 \end{array}$

g) $\begin{array}{l} \dfrac{x^2-1}{x^2-6x+10} \leq 1 \\ log_{10}(x^2-2x+2) < 1 \end{array}$

h) $\begin{array}{l} x^3+27 \geq 0 \\ x^6-13x^2-12 \leq 0 \end{array}$

Respuesta.

a) $[1, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}]$ **b)** $[-6, -5] \cup [7, 8]$ **c)** $(-\infty, 1)$ con $x \neq -2$

d) $[-2, 0]$ **e)** $[-\dfrac{11}{2}, -1]$ **f)** $\emptyset$ **g)** $(-2, \dfrac{11}{6}]$ **h)** $[-2, 2]$

6. Resolver en $\mathbb{R}$,

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} < x - 5$ b) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x$

c) $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ d) $8x - 3 \leq \sqrt{(x-6)(x-9)}$

Respuesta.

a) $\emptyset$ **b)** $(-\infty, \dfrac{6}{5})$ **c)** $(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}, 1] \cup [2, \infty)$ **d)** $(-\infty, 1.1467)$

7. Sean en los reales las funciones: $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{|x| - x} + x$. Encuentre el dominio de: $f \circ g$ y $g \circ f$.

Respuesta.

Dom.$f \circ g = [-(3+\sqrt{5}), \infty)$, Dom.$g \circ f = [-2, \infty)$.

8. Dadas en $\mathbb{R}$, las funciones: $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x^2}\right| - 2}$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Determine el dominio de $f \circ g$.

Respuesta.

Dom.$f \circ g = \{x \in \mathbb{R} \; / \; (-3 \leq x < -1) \vee (-1 < x < 0)\}$

9. Sea $f(x) = x - 4 + \dfrac{22x - 20}{x^2 + 4x - 5}$, encontrar los $x \in \mathbb{R}$, tales que: $f(x) \geq 0$ y también aquellos x, para los que $f(x) < 0$.

Respuesta.

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (-5 < x \leq 0 \;\vee\; x > 1)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow (x < -5 \;\vee\; 0 < x < 1)$

10. Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -2 \vee x > 2 \end{cases}$$

Determine una fórmula para $f \circ g$.

Respuesta.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad |x| \leq 2 \\ x^2 & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

11. Hallar el dominio de definición de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ b) $f(x) = f(x) = \dfrac{x}{log_{10}(1+x)}$

c) $f(x) = \sqrt{3-x} + Arccos\dfrac{x-2}{3}$

Respuesta.

a) $\mathbb{R}$ b) $(-1,\infty) \wedge x \neq 0$ c) $[-1,3]$

12. Hallar el recorrido de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2+2x+3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Respuesta.

a) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ b) $[2,\infty)$

13. Dados los números: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ determine el valor de x para el cuál la función

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + (x-a_n)^2$$

toma su valor mínimo.

Respuesta.

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

14. Hallar el valor máximo de la función $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$

Respuesta.

Máx. $= f(1) = 2$

15. Una ventana de forma rectangular coronada por un semicírculo, de 4 m. de perímetro. Determinar sus dimensiones para que proporcione la máxima iluminación posible.

Respuesta.

Radio $= \dfrac{4}{\pi+4}$

16. Un espejo de forma rectangular de 90 $\times$ 80 cm., se rompió en un esquina de modo que, el trozo de menor tamaño es de la forma de un triángulo rectángulo de catetos

12 y 10 cm.. Determinar el espejo rectangular de área máxima que se puede obtener del trozo mayor.

Respuesta.

87×72.5 cm.

17. Resolver

$$\frac{1}{log_2 x} - \frac{1}{log_2 x\ -\ 1} < 1$$

Respuesta.

$(0 < x < 1\,) \vee (x > 2).$

18. Determine los valores de $m,$ de modo que $2mx^2 - 2x - (3m+2) = 0$ tenga una raíz menor y otra mayor que $1.$

Respuesta.

$(m < \ -4\,) \vee (m > 0)$

19. Determine los valores de $m,$ para los cuáles la ecuación

$$4x^2 + (m-2)x + m - 5 = 0$$

tiene raíces reales diferentes menores que $2.$

Respuesta.

$-\frac{7}{3} < m < 6 \ \vee \ m > 14$

20. Determine los valores de $k,$ para que las raíces de la ecuación

$$2x^2 + (k-3)x + 3 - k = 0$$

estén comprendidas en el intervalo $(-2, 3).$

Respuesta.

$$-6 \leq k \leq \ -5 \ \ \vee \ \ 3 \leq k \leq \frac{17}{3}$$

21. Determine los valores de $k,$ de modo que $f(x) = \ -3x^2 + 2kx - 12$ sea siempre negativo $\forall\, x \in \mathbb{R}.$

Respuesta.

$-6 < k < 6$

22. En la ecuación $(m-2)x^2 + 2(m-1)x - m - 3 = 0,$ determine m de modo que sus raíces sean ambas positivas.

Respuesta.

$1.85 < m < 2.$

23. Determinar para qué valores de k, la ecuación $(x+k)(x+3) = (x+2k)(x+2)$ tiene como conjunto solución a $S = \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ x < \, -2 \,\}$

Respuesta.

$1 < k < 2$

24. Si $x \in [\, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}\,]$, hallar el mayor m que satisface la desigualdad $\dfrac{x-2}{x-4} \geq m$

Respuesta.

$m = \frac{1}{5}$

25. Determinar los valores de m, para los cuales $m\,x^2 + (m+1)\,x \, + (m+1)$ posea raíces reales y distintas.

Respuesta.

$-1 < m < \frac{1}{3}$

26. Determinar los valores de x real que satisface

a) $|\frac{x-2}{x+2}| = \frac{x-2}{x+2}$

b) $|\, x^2 - 4x + 3\,| = \, -\left(\, x^2 - 4x + 3\right)$

c) $|\,(\, x^2 + 4x + 9\,) + (2x+3)\,| = |\, x^2 + 4x + 9\,| + |\,2x+3\,|$

Respuesta.

a) $x < \, -2 \ \vee \ x \geq 2$, b) $1 \leq x \leq 3$, c) $x \geq \frac{3}{2}$

27. La necesidad diaria de agua calculada para cierta ciudad está dada por $|\, c - 3725\,| \, < \, 100$ donde c es el número de galones de agua utilizados por día. Determinar la mayor y menor necesidad diaria de agua.

Respuesta.

$3625 < c < 3825$

28. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo, un lado se alarga 2 cm. y el otro 6 cm. El área del rectángulo resultante debe ser menor que 130 cm^2 y mayor que 80 cm^2 ¿ Cuáles son las posibles longitudes del lado del cuadrado original?

Respuesta.

$\sqrt{84}-4<x<\sqrt{134}-4$ siendo x el lado del cuadrado.

29. ¿Qué número entero se puede añadir al numerador y denominador de la fracción $\dfrac{3}{5}$, si se quiere que la nueva fracción esté comprendida entre: $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{4}{9}$ (ambos extremos incluídos)

Respuesta.

-2

30. La altura de un triángulo es 2 cm. mayor que la base. Hallar la base b de modo que el área del triángulo sea mayor que 20 cm^2.

Respuesta.

$b>\sqrt{41}-1$

31. Graficar el poliedro de soluciones o zona factible definida por las siguientes desigualdades: $4x+3y\le 12,\ x+\dfrac{1}{3}y\le 2,\ x\ge 0$ y $y\ge 0.$ y encuentre las coordenadas de sus vértices.

Respuesta.

Vértices: $A(0,0),\ B(0,4),\ C\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{12}{5}\right),\ D(2,0)$

32. La suma de tres números reales positivos es 12, si la suma de dos de ellos se encuentra en el intervalo $[1,5]$ determine la variación del tercero.

Respuesta.

$7\le z\le 11.$

.