

Pauta Control 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 21 de Marzo, 2011

Tiempo : 15 minutos .

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9.

Solución:

Para $n = 1$ se tiene que $10^1 + 3 \cdot 4^{1+2} + 5 = 10 + 3 \cdot 4^3 + 5 = 207 = 23 \cdot 9$ entonces $n = 1$ cumple la proposición.

Supongamos válido para n , es decir $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9 y probemos para $n + 1$.

En efecto, notamos que

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+1+2} + 5 &= 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+3} + 5 \\ &= 10 \cdot 10^n + 3 \cdot 4 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= (1 + 9) \cdot 10^n + 3 \cdot (1 + 3) \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= 10^n + 9 \cdot 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 9 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 + 9 \cdot 10^n + 9 \cdot 4^{n+2} \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción sabemos que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k$, para cierto $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 + 9 \cdot 10^n + 9 \cdot 4^{n+2} = 9k + 9 \cdot 10^n + 9 \cdot 4^{n+2} = 9(k + 10^n + 4^{n+2})$$

entonces la proposición es válida para $n + 1$.

Por tanto $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

Solución:

Para $n = 1$ se tiene que $1 = (-1)^{1-1}\frac{1}{2}1(1+1)$ entonces $n = 1$ cumple la proposición.

Supongamos válido para n , es decir

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

y probemos para $n + 1$, esto es

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 = (-1)^n\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

En efecto, notamos que

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 &= (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1) + (-1)^n(n+1)^2 \\ &= (-1)^n(n+1) \left((-1)^{-1}\frac{1}{2}n + (n+1) \right) \\ &= (-1)^n(n+1) \left(-\frac{1}{2}n + (n+1) \right) \\ &= (-1)^n(n+1) \left(\frac{-n + 2n + 2}{2} \right) \\ &= (-1)^n(n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) \\ &= (-1)^n\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

entonces la proposición es válida para $n + 1$.

Por tanto

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.