Capítulo 4

Progresiones

4.1. Progresiones Aritméticas

Definición 1

Se dice que una sucesión a_n es una progresión aritmética $(P.A.)$ si y solo si se puede expresar por

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

donde a_1 y d son reales.

Como bien sabemos a_1 es el primer término de la sucesión, en este caso de la progresión y d se acostumbra a llamar diferencia simétrica de ella.

Ejemplo 1

$a_n = 4n + 7$ es una $P.A.$ pues se puede expresar como $a_n = 11 + (n-1)4$ note que en este caso: $a_1 = 11$ y $d = 4$.

Propiedad 1

Una sucesión de números reales tal como

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

representa a una $P.A.$ si y solo si $d = a_{k+1} - a_k,\ k = 1, 2, \ldots, (n-1)$

Demostración.

$a_{k+1} - a_k = a_1 + k\,d - (a_1 + (k-1)d) = d$

Ejemplo 2

La sucesión: $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}},\ \dfrac{1}{1-x},\ \dfrac{1}{1-\sqrt{x}},\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ (x \neq 1)$ es una $P.A.$ pues

$$d = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1-x} = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$$

Observaciones 1

1) Nótese que para cualquier $P.A.$ $a_{k+1} = a_k + d,\ \forall\ k = 1, 2, \ldots, (n-1)$

2) Dependiendo de los ejercicios en algunos casos es conveniente tomar la terna en $P.A.:$ $a-d,\ a,\ a+d$ en otros el cuarteto $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$ y así sucesivamente. (Ver ejercicios resueltos: 2)

Propiedad 2

La suma de los n primeros términos de una $P.A.$, cuyo primer término es a_1 y su diferencia d, es:

$$S_n = \frac{n}{2}[\,2a_1 + (n-1)\,d\,]$$

Demostración.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = a_1 n + d\{\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\,\} = a_1 n + d\{\,\tfrac{1}{2}n(n+1) - n\}$$
$$= \frac{n}{2}[\,2a_1 + (n-1)\,d\,]$$

Interpolación

Cuando se pide interpolar p medios aritméticos entre a y b reales dados, significa que: $a,$ los p números en cuestión y b deben estar en $P.A.$.

4.2. Ejercicios Resueltos

1. El tercer término de una $P.A.$ es a y el término de lugar 21 es $a + 36\,b$, con a y b reales dados, no nulos a la vez. Determine la $P.A.$.

Solución.

Por hipótesis $a_3 = a_1 + 2\,d = a \ \wedge\ a_{21} = a_1 + 20\,d = a + 36\,b$ de donde resolviendo el sistema para a_1 y d se obtiene $a_1 = a - 4b$ y $d = 2b$ por tanto resulta $a_n = 2b\,n + a - 6b$ que es la $P.A.$ pedida.

2. La suma de tres números en $P.A.$ es 12 y su producto es 48. Determine tales números.

Solución.

Conviene tomar $a-d,\ a,\ a+d$ como los tres números en $P.A.$ pues de su suma igual a 12 se obtiene de inmediato que $a=4$ y por tanto de $(4-d)\,4\,(4+d)=48,$ se obtiene $d=\pm 2,$ así los números son $2,4,\ 6\ \vee\ 6,4,\ 2.$

3. Dada la $P.A.\quad -35x,\ \ldots,\ 3x;\ x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$. Calcular a_n sabiendo que existen 17 términos entre los extremos. El problema tambien se puede enunciar como: Interpolar 17 medios aritméticos entre $-35x$ y $3x.$

Solución.

De inmediato $a_1=-35x$ y $a_{19}=3x\ \Leftrightarrow\ -35x+18d=3x\ \Leftrightarrow d=\dfrac{19}{9}x$ por tanto: $a_n=-35x+(n-1)\dfrac{19}{9}x$

4. Encontrar el número de términos de la $P.A.:\ 12,\ 16,\ 20,\ \ldots$ si $S_n=208.$

Solución.

Como $a_1=12$ y $d=4$ entonces $\dfrac{n}{2}\left[\,24+(n-1)4\,\right]=208\Rightarrow n=8$ la raíz negativa se descarta pues $n\geq 1$

5. Determine la suma de los 100 primeros términos de una $P.A.$ cuyo tercer término es 4 veces el primero y su sexto término es 17.

Solución.

$a_3=4\,a_1$ y $a_6=17$ conducen a resolver el sistema
$$a_1+2d=4\,a_1$$
$$a_1+5d=17$$
de donde $a_1=2$ y $d=3,$ por tanto $S_{100}=50\,[4+99\cdot 3\,]=15050.$

6. En una $P.A.$ si los términos de lugares p,q y r son respectivamente: a,b y $c.$ Demuestre que

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$$

Solución.

Por hipótesis se tienen:
$$a_1+(p-1)d=a \qquad (1)$$
$$a_1+(q-1)d=b \qquad (2)$$

$$a_1 + (r-1)d = c \qquad (3)$$

De $(1), (2)$ y (3) se obtienen: $a_1 - d = a - pd = b - qd = c - rd$ y de aquí

$$p - q = \tfrac{1}{d}(a-b) \qquad (4)$$

$$q - r = \tfrac{1}{d}(b-c) \qquad (5)$$

$$r - p = \tfrac{1}{d}(c-a) \qquad (6)$$

Multiplicando (4) por c, (5) por a y (6) por b se tiene:

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$$

7. Encontrar la suma de todos los números entre 100 y 1000, que sean divisibles por 14.

Solución.

El primer número, después de 100, divisible por 14 es 112, luego $a_1 = 112$ y $d = 14$, entonces $a_n = 112 + (n-1)14 < 1000 \Rightarrow n < 64.43$ luego $n = 64$ con lo que $S_{64} = 32[\,2 \cdot 112 + 63 \cdot 14\,] = 35392$.

8. Si la suma de m términos de una $P.A.$ es a la suma de n términos, como m^2 es a n^2. Demostrar que

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

Demostración.

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow \frac{m[\,2a_1 + (m-1)d\,]}{n[\,2a_1 + (n-1)d\,]} = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow d = 2a_1$$

entonces:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{a_1 + (m-1)2a_1}{a_1 + (n-1)2a_1} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

9. En una $P.A.$ cuyo primer término es a, si la suma de los p primeros términos es cero, demuestre que la suma de los siguientes q términos es

$$\frac{a(p+q)q}{1-p}$$

Solución.

Por hipótesis tenemos: $S_p = \frac{p}{2}[2a + (p-1)d] = 0,\ p \neq 0 \Rightarrow 2a + (p-1)d = 0$ de donde $d = \frac{2a}{1-p},\ p \neq 1$; por otra parte $S = S_{p+q} - S_p,\ S$ es la suma de los q siguientes términos, ahora como $S_p = 0 \Rightarrow$

$$S = S_{p+q} = \frac{p+q}{2}[2a + (p+q-1)\frac{2a}{1-p}] = \frac{a(p+q)q}{1-p}$$

10. Si la suma de los p primeros términos de una $P.A.$ es q y la suma de los q primeros términos es p. Demuestre que la suma de los $p+q$ primeros términos es $-(\ p+q)$.

Demostración.

Nos dicen que: $S_p = \frac{p}{2}[2a_1 + (p-1)d] = q \ \wedge\ S_q = \frac{q}{2}[2a_1 + (q-1)d] = p$, resolviendo éste sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos:

$$d = \frac{-2(p+q)}{pq} \quad \text{y} \quad a_1 = \frac{[q^2 + (p-1)(p+q)]}{pq}$$

por tanto $S_{p+q} = \frac{p+q}{2}[2a_1 + (p+q-1)d]$, y remplazando los valores de a_1 y d, obtenemos luego de simplificación algebraica, que: $S_{p+q} = -(\ p+q)$.

11. La suma de los 50 primeros términos de una $P.A.$ es 200 y la de los 50 siguientes 2700. Determine el primer término y la diferencia.

Solución.

$S_{50} = 25\,[2a_1 + 49d] = 200 \quad (1)$ tambien

$S_{100} - S_{50} = 50\,[2a_1 + 99d] - 200 = 2700 \Leftrightarrow 50\,[2a_1 + 99d] = 2900 \qquad (2),$

resolviendo el sistema formado por (1) y (2), resultan: $a_1 = -\frac{41}{2}$ y $d = 1$.

12. Dada la $P.A.:\ 4,\ 12,\ 20,\ 28, \ldots$.

a) Demuestre que la suma de n términos de la sucesión es un cuadrado perfecto.

b) Calcule $\sqrt{4624}$ en base a lo anterior.

c) Determine r, si $a_r + a_{r+1} = S_{16}$

Solución.

a) $S_n = \frac{n}{2}[2\cdot 4 + (n-1)8] = (2n)^2$

b) $4624 = (2n)^2 \Leftrightarrow n = 34 \ \Rightarrow 4624 = S_{34} \Leftrightarrow \sqrt{4624} = \sqrt{S_{34}} = 2\cdot 34 = 68$

c) $S_{16} = 1024 = [4 + (r-1)8] + [4 + r8] \Leftrightarrow 1024 = 16\,r \Leftrightarrow r = 64.$

13. Hallar la relación entre x e y, de manera que el medio aritmético de lugar r, entre x y $2y$, sea el mismo que el medio aritmético de lugar r entre $2x$ e y. Habiendo n medios aritméticos interpolados en cada caso.

Solución.

Para el primer caso: $2y = x + (n+1)\,d_1 \ \Leftrightarrow\ d_1 = \dfrac{2y-x}{n+1} \ \Rightarrow a_r = x + r\,d_1$

para el segundo caso $\quad y = 2x + (n+1)d_2 \Leftrightarrow\ d_2 = \dfrac{y-2x}{n+1} \ \Rightarrow\ a'_r = 2x + rd_2$

Ahora por hipótesis $a_r = a'_r$ de donde

$$x + r\,\frac{2y-x}{n+1} = 2x + r\,\frac{y-2x}{n+1} \ \Leftrightarrow\ x(n-r+1) = yr$$

14. En una $P.A.$ se conoce la suma S_m de los m primeros términos y la suma S_n de los n primeros términos. Calcular la diferencia de la $P.A.$.

Solución.

De inmediato $S_m = \dfrac{m}{2}\,[2a_1 + (m-1)d\,]$ y $S_n = \dfrac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)d\,]$ de donde

$-\,2nS_m = \,-\,2nma_1 + n(m-1)d$ y $2mS_n = 2nma_1 + m(n-1)d$

sumando miembro a miembro resulta

$$2(mS_n - nS_m) = dmn(m-n) \ \Leftrightarrow\ d = \frac{2(mS_n - nS_m)}{mn(m-n)},\ m \neq n$$

15. Si $log_k x,\ log_m x, log_n x$ están en $P.A.$, demostrar que $n^2 = (kn)^{log_k m}$

Demostración.

$log_k x,\ log_m x, log_n x$ en $P.A.\ \Leftrightarrow\ log_m x - log_k x = log_n x - log_m x\ \Leftrightarrow$

llevando a base 10 se tiene: $\dfrac{2log\,x}{log\,m} = \dfrac{log\,x}{log\,k} + \dfrac{log\,x}{log\,n}$

$\Leftrightarrow\ 2log\,k\,log\,n = log\,m\,log\,n + log\,m\,log\,k$

$$\Leftrightarrow log\, n^2 = log_k m(log\, n + log\, k) \;\Leftrightarrow\; n^2 = (kn)^{log_k m}$$

16. Una persona debe pagar una deuda de 360.000 en 40 cuotas que forman una $P.A.$ cuando 30 de los pagos están cubiertos la persona fallece, dejando la tercera parte de la deuda sin pagar. Calcule el valor del primer pago.

Solución.

Sean a_1 y d el primer término y la diferencia de la $P.A.$ en cuestión, entonces:

$$S_{40} = 20\,[\,2a_1 + 39d\,] = 360000 \qquad (1)$$
$$S_{30} = 15\,[\,2a_1 + 29d\,] = \tfrac{2}{3} \cdot 360000 \quad (2)$$

de donde resolviendo el sistema formado por (1) y (2) se obtiene:

$d = 200$ y $a_1 = 5100$.

$4.3.$ Progresiones Geométricas

Definición 1

Se dice que una sucesión a_n es una progresión geométrica $(P.G.)$ si y solo si se puede expresar por

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

donde a_1 y r son reales.

Como bien sabemos a_1 es el primer término de la sucesión, en este caso de la progresión y r se acostumbra a llamar razón constante

Ejemplo 1

$a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ es una $P.G.$ pues se puede expresar como $a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ note que en este caso: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ y $r = \dfrac{1}{2}$

Propiedad 1

Una sucesión de números reales tal como

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

representa a una $P.G.$ si y solo si $r = \dfrac{a_{k+1}}{a_k},\ k = 1, 2, \ldots, (n-1)$

Demostración.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_1 r^k}{a_1 r^{k-1}} = r$$

Ejemplo 2

La sucesión: $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}x,\ \frac{2}{9}x^2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ (x \neq 0)$ es una $P.G.$ pues

$$r = \frac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{9}x^2}{\frac{1}{3}x} = \frac{2}{3}x$$

Observaciones 1

1) Nótese que para cualquier $P.G.\ \ a_{k+1} = r\, a_k,\ \forall\ k = 1, 2, \ldots, (n-1)$

2) Dependiendo de los ejercicios en algunos casos es conveniente tomar la terna en $P.G.:\ \ \frac{a}{r},\ a,\ ar$ (Ver ejercicios resueltos: 3)

Propiedad 2

La suma de los n primeros términos de una $P.G.$, cuyo primer término es a_1 y razón r, es:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1},\ (r \neq 1)$$

Demostración.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1}\quad (1)$, multiplicando (1) por r se tiene $r\,S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^k \qquad (2)$

Restando miembro a miembro (1) de (2) : $(r-1)S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^k - \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1}$

$$(r-1)S_n = a_1 \sum_{k=1}^{n} (r^k - r^{k-1}) = a_1 \big(r^n - r^0\big) \Leftrightarrow S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}, (r \neq 1)$$

Interpolación

Cuando se pide interpolar p medios geométricos entre a y b reales dados, significa que: a, los p números en cuestión y b deben estar en $P.G.$.

Serie geométrica.

Una serie geométrica no es más que la suma de infinitos términos de una $P.G.$, es decir:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ = \sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$$

Como bien sabemos la suma de los n primeros términos es

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}, \ (r \neq 1)$$

Si $-1 < r < 1 \Leftrightarrow |r| < 1$ y considerando que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces la suma de infinitos términos, con esta razón r es : $\dfrac{a_1}{1 - r}$

Si $|r| \geq 1$ dicha suma tiende a $\pm\infty$ o bien no existe.

4.4. Ejercicios Resueltos

1. Interpolar tres medios geométricos entre $\dfrac{9}{4}$ y $\dfrac{4}{9}$

Solución.

$a_5 = \dfrac{9}{4} r^4 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} = \dfrac{9}{4} r^4 \Leftrightarrow r = \dfrac{2}{3},$ Así los tres medios son: $\dfrac{3}{2}, \ 1, \ \dfrac{2}{3}$

2. La suma de los 6 primeros términos de una $P.G.$ es 9 veces la suma de los tres primeros términos, determine su razón.$(a_1 \neq 0, \ r \neq 1)$

Solución.

$$S_6 = 9\, S_3 \Leftrightarrow a_1 \frac{r^6 - 1}{r - 1} = 9 a_1 \frac{r^3 - 1}{r - 1} \Leftrightarrow \left(r^3 - 1\right)\left(r^3 + 1\right) = 9\left(r^3 - 1\right)$$

como $r \neq 1 \Rightarrow r^3 + 1 = 9 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$

3. El producto de tres números en $P.G.$ es 27 y la suma de sus recíprocos es $3.$ Encuentre tales números.

Solución.

En este caso conviene tomar $\dfrac{a}{r}, \ a, \ ar$ como los tres números en $P.G.$ por tanto:

$\dfrac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 27 \Rightarrow a = 3,$ luego $\dfrac{r}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3r} = 3 \Rightarrow r^2 - 8r + 1 = 0$ de donde $r = 4 \pm \sqrt{15}$ y los números son: $\dfrac{3}{4 \pm \sqrt{15}}, \ 3, \ 3\left(4 \pm \sqrt{15}\right).$

4. En una $P.G.$ si los términos de lugares p, q y r son respectivamente: a, b y c. Demuestre que

$$a^{(q-r)}\, b^{(r-p)}\, c^{(p-q)} = 1$$

Demostración.

Sea x el primer término e y la razón de la $P.G.$, luego:

$$x\, y^{p-1} = a, \quad x\, y^{q-1} = b, \quad x\, y^{r-1} = c$$

de donde obtenemos:

$$a^{(q-r)} = x^{(q-r)}\, y^{(p-1)(q-r)}$$
$$b^{(r-p)} = x^{(r-p)}\, y^{(q-1)(r-p)}$$
$$c^{(p-q)} = x^{(p-q)}\, y^{(r-1)(p-q)}$$

multiplicando miembro a miembro, finalmente

$$a^{(q-r)}\, b^{(r-p)}\, c^{(p-q)} = 1$$

5. Demostrar que el término de lugar $(n+1)$ de una $P.G.$ cuyo primer término es a y el tercer término es b, es igual al término de lugar $(2n+1)$ de otra $P.G.$ cuyo primer término es a y cuyo quinto término es b.

Demostración.

De la primera $P.G.$ se tiene: $a\, r^2 = b \Leftrightarrow r = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_{n+1} = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$

De la segunda $P.G.$: $a\, r^4 = b \Leftrightarrow r = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a_{2n+1} = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2n}{4}} = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$

6. Calcular la suma

$$S = 2 + \frac{a+b}{ab} + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{a^n+b^n}{a^nb^n}$$

Solución.

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{a^n} + 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{b^n} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{a} - 1} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{b} - 1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a^n(a-1)} + \frac{b^{n+1} - 1}{b^n(b-1)} \end{aligned}$$

7. Si a, b, c, d están en $P.G.$, demostrar que

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$$

Demostración.

$a,\ b,\ c,\ d$ en $P.G.\ \Leftrightarrow\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow b^2=ac\ \wedge\ c^2=bd\ \wedge\ bc=ad$

Ahora,

$$\begin{aligned}(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2&=2b^2+2c^2+a^2+d^2-2ac-2bc-2bd\\&=2ac+2bd+a^2+d^2-2ac-2ad-2bd\\&=a^2+d^2-2ad=(a-d)^2\end{aligned}$$

8. Calcular la suma indicada, hasta n términos.

$$S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Solución.

Observemos que $a_n=\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}\ \Rightarrow S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$,

de aquí

$$\begin{aligned}S_n-\frac{1}{2}\,S_n&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}\\ \frac{1}{2}\,S_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2(k+1)-1}{2^{k+1-1}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}\\ \frac{1}{2}\,S_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{(\frac{1}{2})^{n-1}-1}{\frac{1}{2}-1}-\frac{2n-1}{2^n}\\ S_n&=6-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2n-1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

9. Si $x:y$ como $2:1$, resolver:

$$4^{\,2-x}+16^{\,y-\frac{1}{2}}+4^{\,4-x}+16^{\,y+\frac{1}{2}}+4^{\,6-x}+16^{\,y+\frac{3}{2}}=1365$$

Solución.

Agrupando covenientemente y observando que se forman dos $P.G.$, se tiene:

$$4^{\,2-x}+4^{\,4-x}+4^{\,6-x}+16^{\,y-\frac{1}{2}}+16^{\,y+\frac{1}{2}}+16^{\,y+\frac{3}{2}}=1365$$

$$4^{\,2-x}\,\frac{16^3-1}{15}+16^{\,y-\frac{1}{2}}\,\frac{16^3-1}{15}\ =\ 1365\ \Leftrightarrow\ 4^{\,2-x}+16^{\,y-\frac{1}{2}}=5$$

$\Leftrightarrow 4^{2x} - 20\, 4^{x} + 64 = 0 \;\Rightarrow 4^{x} = \dfrac{1}{2}(20 \pm 12)$ de donde se obtienen:

$x_1 = 2 \,\wedge\, y_1 = 1;\; x_2 = 1 \,\wedge\, y_2 = \dfrac{1}{2}$

10. Demostrar que el número $A = 111\ldots112888\ldots896$, que tiene n cifras 1 y $n-1$ cifras 8, es un cuadrado perfecto; Calcular tambien $\sqrt{A}$, para $n = 4$.

Demostración.

Notemos que A tiene $2(n+1)$ cifras, expresando A en potencias de 10 se tiene

$A = 10^{2n+1} + 10^{2n} + \cdot\cdot\cdot + 10^{n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 8\cdot 10^{n} + 8\cdot 10^{n-1} + \cdot\cdot$
$\quad \cdot\cdot + 8\cdot 10^{2} + 9\cdot 10 + 6$

$A = 10^{n+2}(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + 1) + 2\cdot 10^{n+1} +$
$\quad 8\cdot 10^{2}(10^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + 1) + 96$

$A = 10^{n+2}\cdot \frac{1}{9}(10^{n} - 1) + 2\cdot 10^{n+1} + 8\cdot 10^{2}\cdot \frac{1}{9}(10^{n-1} - 1)$

$A = \frac{1}{9}\,(10^{2n+2} - 10^{n+2} + 8\cdot 10^{n+1} - 8\cdot 10^{2} + 18\cdot 10^{n+1} + 864)$

$A = \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 160\cdot 10^{n} + 64) = [\frac{1}{3}\,(10^{n+1} + 8)]^{2} \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{1}{3}(10^{n+1} + 8)$

para $n = 4$; $\sqrt{A} = \sqrt{1111288896} = \frac{1}{3}\,(10^{5} + 8) = 33336.$

11. Encuentre la suma de n términos de la sucesión cuyo k-ésimo término es

$$a_k = (2k+1)2^{k}$$

Solución.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)2^{k} \Leftrightarrow 2S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)2^{k+1}$ de donde restando miembro a miembro estas sumas, se tiene

$2S_n - S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)2^{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)2^{k}$

$$S_n = (2n+1)2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)2^{k+1} - \sum_{k=2}^{n}(2k+1)2^{k} - 3\cdot 2$$

$$S_n = (2n+1)2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)2^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)2^{k+1} - 3\cdot 2$$

$$S_n = (2n+1)2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-2)2^{k+1} - 6$$

$$S_n = (2n+1)2^{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+2} - 6$$

$$S_n = (2n+1)2^{n+1} - 8\frac{2^{n-1}-1}{2-1} - 6 = n2^{n+2} - 2^{n+1} + 2$$

12. Calcular los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que estos ángulos están en $P.G.$ y que el ángulo mayor es 9 veces el segundo.

Solución.

Supongamos $r > 1 \Rightarrow$ los ángulos son $a,\ ar,\ ar^2$ y ar^3 tales que

$a < ar < ar^2 < ar^3$ y $9ar = ar^3 \Leftrightarrow r = 3$. Por otra parte de la geometría elemental sabemos que

$a + ar + ar^2 + ar^3 = 360° \Rightarrow a + 3a + 9a + 27a = 360° \Leftrightarrow a = 9°$, luego los ángulos resultan ser: 9°, 27°, 81° y 243°.

Si se supone $r < 1$, $r = \frac{1}{3}$ y $a = 243°$ y resultan los mismos ángulos.

13. En un cuadrado de lado a se inscribe otro cuadrado cuyos vértices dividen los lados del primer cuadrado en la razón $1:1$. En el segundo cuadrado se inscribe un tercer cuadrado que divide a los lados del anterior en la misma razón y así sucesivamente. Encontrar la suma de los perímetros y áreas de n de estos cuadrados, cuáles son estas sumas si $n \to \infty$.

Solución.

Perímetro; $P_1 = 4a,\ P_2 = 4\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ P_3 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a, \ldots,\ P_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$$S_n^P = 4a[\,1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}] = 4a\,\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Si $n \to \infty \Rightarrow S^P = \dfrac{8}{2-\sqrt{2}}\,a$

Área;

$$A_1 = a^2,\ A_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a^2,\ A_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 a^2, \ldots,\ A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2(n-1)} a^2$$

$$S_n^A = a^2[\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}];\ \text{si } n \to \infty \Rightarrow S^A = 2a^2$$

14. Se deja caer una pelota de goma desde una altura h, en el primer rebote la pelota sube hasta el tercio de la altura h, en el segundo rebote sube hasta el tercio de la nueva altura y así sucesivamente. Calcule la distancia que recorre la pelota antes de detenerse.

Solución.

Se debe tener que: $H = h + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}h\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}h\right)\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot$

$$= h\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdot\cdot\cdot\right]$$

Se trata de una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3} < 1$, por tanto la suma de infinitos términos será

$$H = h\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\,h$$

4.5. Progresiones Armónicas

Definición 1

Se dice que la sucesión $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots.$ es una progresión armónica $(P.H.)$ si y solo si la sucesión $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3},\ \ldots.$ está en progresión aritmética

Ejemplo 1

Es una progresión armónica

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\,,\ \ldots.$$

Nota.

Se sabe que, no es posible una fórmula elemental, tal como en las $P.A.$ y $P.G.$ para calcular la suma de los n primeros términos de un $P.H.$

Interpolación

Cuando se pide interpolar p medios armónicos entre a y b reales dados, significa que: a, los p números en cuestión y b deben estar en $P.H.$.

4.6. Ejercicios Resueltos

1. Interpolar 2 medios armónicos entre 5 y 11.

Solución.

Se debe tener que si $5, a_2,\, a_3,\, 11$ están en $P.H.$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{5},\, \dfrac{1}{a_2},\, \dfrac{1}{a_3},\, \dfrac{1}{11}$ están en $P.A.$ luego

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{11} - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{10\,a_3}{5+a_3} \text{ y } \frac{1}{11} = \frac{2}{a_3} - \frac{5+a_3}{10\,a_3} \Rightarrow$$

$a_3 = \dfrac{55}{7}$ y $a_2 = \dfrac{55}{9}$

2. Dados a y b encontrar n números $a_1,\, a_2,\, \ldots .\, a_n$ tales que

$$a,\;\; a_1,\, a_2,\, \ldots .\, a_n,\, b \text{ estén en } P.H. \, (a \text{ y } b \neq 0)$$

Solución.

$a,\, a_1,\, a_2,\, \ldots .\, a_n, b$ están en $P.H.$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \ldots ., \dfrac{1}{a_n}, \dfrac{1}{b}$ están en $P.A.$

de aquí $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a} + (n-1)d \;\Leftrightarrow\; d = \dfrac{a-b}{ab(n-1)} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{a} + (k-1)\dfrac{a-b}{ab(n-1)}$ de donde

$$a_k = \frac{(n-1)ab}{(k-1)a \,+\, (n-k)b}$$

Para el caso particular de un medio armónico entre a y b, hacemos $k = 2 \,\wedge\, n = 3 \Rightarrow a_2 = \dfrac{2\,ab}{a+b}$

3. En una $P.H.$ si los términos de lugares p, q y r son respectivamente: a, b y c. Demuestre que

$$(q-r)bc + (r-p)ca + (p-q)ab = 0$$

Demostración.

Siendo x y d el primer término y diferencia de la $P.A.$ correspondiente, se tiene:

$\dfrac{1}{a} = x + (p-1)d, \qquad \dfrac{1}{b} = x + (q-1)d \quad$ y $\quad \dfrac{1}{c} = x + (r-1)d,$ de donde

$$\frac{(q-r)}{a} = (q-r)x + (q-r)(p-1)d$$
$$\frac{(r-p)}{b} = (r-p)x + (r-p)(q-1)d$$

$$\frac{(p-q)}{c} = (p-q)x + (p-q)(r-1)d$$

Sumando estas tres expresiones, se tiene:

$$\frac{(q-r)}{a} + \frac{(r-p)}{b} + \frac{(p-q)}{c} = 0$$

amplificando por abc, finalmente

$$(q-r)bc + (r-p)ca + (p-q)ab = 0$$

4. Si b es medio armónico entre a y c, demostrar que

$$\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

Demostración.

b medio armónico entre a y $c \Leftrightarrow b = \dfrac{2ac}{a+c}$ por tanto

$$\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{\frac{2ac}{a+c}-a} + \frac{1}{\frac{2ac}{a+c}-c} = \frac{a+c}{a(c-a)} + \frac{a+c}{c(a-c)}$$

$$= (a+c)[\frac{1}{a(c-a)} - \frac{1}{c(c-a)}] = (a+c)\frac{1}{ac} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

5. Si a, b, c están en $P.H.$, demostrar que $\dfrac{a}{a-b} = \dfrac{a+c}{a-c}$

Demostración.

Si a, b, c están en $P.H. \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ están en $P.A. \Rightarrow b(a+c) = 2ac$ sumando a^2 ambos miembros se tiene

$ba + bc + a^2 = 2ac + a^2 \Leftrightarrow a^2 - ac = a^2 - ab + ac - bc \Leftrightarrow$

$a(a-c) = (a+c)(a-b) \Leftrightarrow \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{a+c}{a-c}$

6. Si el término de lugar m de una $P.H.$ es igual a n y el término de lugar n es igual a m, demuestre que el término de lugar $(m+n)$ es igual a $\dfrac{mn}{m+n}$

Demostración.

Sean a y d el primer término y la diferencia de la $P.A.$ correspondiente, luego:

$\dfrac{1}{a},\ \ldots,\ n,\ \ldots m$ en $P.H.\ \Rightarrow a, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{m}$ están en $P.A.$ entonces

$$a_m = a + (m-1)d = \frac{1}{n} \qquad (1)$$

$$a_n = a + (n-1)\,d = \frac{1}{m} \qquad (2)$$

resolviendo (1) y (2) para a y d, obtenemos: $a = d = \dfrac{1}{n\,m}$ por tanto,

$a_{m+n} = a + (m+n-1)d = \dfrac{1}{n\,m} + (m+n-1)\dfrac{1}{n\,m} = \dfrac{m+n}{nm}$ esto implica

que para la $P.H.$ se tendrá $b_{m+n} = \dfrac{mn}{m+n}$

7. Si $a,\ b,\ c$ están en $P.H.$, demostrar que

$$log(a+c) + log(a-2b+c) = 2\,log(a-c)$$

Demostración.

Si $a,\ b,\ c$ están en $P.H.\ \Rightarrow \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ están en $P.A.\ \Rightarrow b = \dfrac{2ac}{a+c} \Leftrightarrow$

$-2b = -\dfrac{4ac}{a+c} \Leftrightarrow a - 2b + c = a - \dfrac{4ac}{a+c} + c \Leftrightarrow$

$(a+c)(a-2b+c) = (a-c)^2$ de donde aplicando logaritmos y sus propiedades se obtiene

$$log(a+c) + log(a-2b+c) = 2\,log(a-c)$$

8. Determine el valor de k para que $k,\ k+6$ y $k+8$ estén en progresión armónica.

Solución.

Si $k,\ k+6$ y $k+8$ están en $P.H.\ \Rightarrow \dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k+6}, \dfrac{1}{k+8}$ están en $P.A.$ luego se debe cumplir que $\dfrac{1}{k+6} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k+8} - \dfrac{1}{k+6}$ de donde se obtiene $k = -12$

9. Si a, b, c, d están en progresión armónica entonces $a + d > b + c$ con a, b, c y d positivos.

Demostración.

Si a, b, c, d están en $P.H.\ \Rightarrow \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{d}$ están en $P.A.$ por tanto:

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+q;\;\; \frac{1}{c}=\frac{1}{a}+2q;\;\; \frac{1}{d}=\frac{1}{a}+3q \text{ de donde}$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+3q=\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\Leftrightarrow$$

$$\frac{b+c}{bc}=\frac{2+3aq}{a}=\frac{a+d}{ad}\Rightarrow \frac{1}{bc}=\frac{2+3aq}{a(b+c)}\;\wedge\; \frac{1}{ad}=\frac{2+3aq}{a(a+d)}$$

por otra parte

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+q\right)\left(\frac{1}{a}+2q\right)=\frac{1}{a^2}+3\frac{q}{a}+2q^2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{d}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+3q\right)=\frac{1}{a^2}+3\frac{q}{a} \qquad (2)$$

de (1) y (2) se puede implicar que $\frac{1}{bc}>\frac{1}{ad}$ y por tanto

$$\frac{2+3aq}{a(b+c)}>\frac{2+3aq}{a(a+d)}\Leftrightarrow a+d>b+c$$

4.7. Ejercicios Resueltos (P.A. , P.G. y P.H.)

1. La suma de tres números en $P.G.$ es 70, si los extremos son amplificados por 4 y el del medio por 5, la serie está en $P.A.$. Hallar los números.

Solución.

Sean a, ar, ar^2 los tres números en $P.G.$, luego $a(1+r+r^2)=70 \qquad (1)$

tambien nos dicen que $4a, 5ar, 4ar^2$ están en $P.A.$ $\Rightarrow$

$5ar-4a=4ar^2-5ar \Leftrightarrow 2r^2-5r+2=0 \Rightarrow r_1=2$ y $r_2=\frac{1}{2}$, de donde por (1) obtenemos; $a_1=10$ y $a_2=40$ luego los números resultan ser:

$10, 20, 40 \;\vee\; 40, 20, 10$

2. Hallar una $P.A.$ cuyo primer término es 1, y tal que los términos de lugares $2, 10$ y 34 se encuentran en $P.G.$.

Solución.

De inmediato se tiene que: $a_2 = 1 + d, \quad a_{10} = 1 + 9d$ y $a_{34} = 1 + 33d$

además $a_2, a_{10},\, a_{34}$ en $P.G. \Rightarrow (a_{10})^2 = a_2\, a_{34} \Leftrightarrow$

$(1 + 9d)^2 = (1 + d)\,(1 + 33d) \Leftrightarrow 48\,d^2 - 16\,d = 0 \Rightarrow d = 0 \,\vee\, d = \frac{1}{3}$

Así resultan: $1,\, 1,\, 1,\, \ldots.$ y $1,\, \frac{4}{3},\, \frac{5}{3}, 2, \ldots.$ las dos $P.A.$ correspondientes.

3. Demostrar que si $\frac{1}{2}(a+b),\, b,\, \frac{1}{2}(b+c)$ se encuentran en $P.H.$ entonces $a,\, b,\, c$ lo están en $P.G.$.

Demostración.

Si $\dfrac{1}{2}(a+b),\, b,\, \dfrac{1}{2}(b+c)$ están en $P.H. \Rightarrow \dfrac{2}{a+b},\, \dfrac{1}{b},\, \dfrac{2}{b+c}$ lo están en $P.A.$
luego $\dfrac{1}{b} - \dfrac{2}{a+b} = \dfrac{2}{b+c} - \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} \Leftrightarrow$

$$ab + ac + b^2 + bc = ab + bc + 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = ac \Rightarrow a,\, b,\, c \text{ están en } P.G.$$

4. Si $a^2,\, b^2,\, c^2$ están en $P.A.$, demuestre que $b+c,\, a+c,\, a+b$ están en $P.H.$.

Demostración.

Si $a^2,\, b^2,\, c^2$ están en $P.A. \Leftrightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow$

$(b-a)(b+a) = (c-b)(c+b) \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{b+c} = \dfrac{c-b}{a+b} \Leftrightarrow$

$\dfrac{c+b-a-c}{(b+c)(a+c)} = \dfrac{a+c-b-a}{(a+b)(a+c)} \Leftrightarrow \dfrac{(c+b)-(a+c)}{(b+c)(a+c)} = \dfrac{(a+c)-(b+a)}{(a+b)(a+c)}$
$\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{a+c} - \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a+c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{b+c},\, \dfrac{1}{a+c},\, \dfrac{1}{a+b}$ están en $P.A. \Rightarrow$

$b+c,\, a+c,\, a+b$ están en $P.H.$.

5. Si $\dfrac{1}{b-a},\, \dfrac{1}{2b},\, \dfrac{1}{b-c}$ están en $P.A.$, demostrar que $a,\, b,\, c$ están en $P.G.$.

Demostración.

Si $\dfrac{1}{b-a},\, \dfrac{1}{2b},\, \dfrac{1}{b-c}$ están en $P.A. \Rightarrow \dfrac{1}{2b} - \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{b-c} - \dfrac{1}{2b} \Leftrightarrow$

$$-\frac{a+b}{b^2-bc}=\frac{b+c}{b^2-bc} \Leftrightarrow -b^3-ab^2+cb^2+abc=b^3+cb^2-ab^2-abc \Leftrightarrow$$

$b^3=abc \Leftrightarrow b^2=ac \Leftrightarrow a,\, b,\, c$ están en $P.G.$.

6. Si $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{d}$, demostrar que $a,\, b,\, c$ están en $P.A.$ si $a=d$; en $P.G.$ si $b=d$ y en $P.H.$ si $c=d$.

Demostración.

Si $a=d \Rightarrow \dfrac{a-b}{b-c}=1 \Leftrightarrow a-b=b-c \Leftrightarrow a,\, b,\, c$ están en $P.A.$

Si $b=d \Rightarrow \dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{b} \Leftrightarrow b^2=ac \Leftrightarrow a,\, b,\, c$ están en $P.G.$

Si $c=d \Rightarrow \dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c} \Leftrightarrow ac-bc=ab-ac \Leftrightarrow \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b} \Leftrightarrow a,\, b,\, c$ están en $P.H.$.

7. Si m es el producto de n números en $P.G.$, p su suma y q la suma de sus recíprocos, demuestre que

$$m^2=\left(\frac{p}{q}\right)^n$$

Demostración.

Sean $a,\, ar,\, ar^2,\, \ldots,\, ar^{n-1}$ los n números en $P.G.$, por tanto:

$$a\cdot ar\cdot ar^2\cdot \,\cdot\,\cdot\, ar^{n-1} = m \qquad (1)$$

$$a+ar+ar^2+\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,+ar^{n-1} = p \quad (2)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,+\frac{1}{ar^{n-1}} = q \qquad (3)$$

De (1) : $a^n\, r^{1+2+\cdots+(n-1)}=m \Leftrightarrow a^n\, r^{\frac{1}{2}(n-1)n}=m$

$$\Leftrightarrow a^{2n}\, r^{(n-1)n}=m^2$$

De (2) : $a\dfrac{r^n-1}{r-1}=p$ y de (3) se obtiene: $\dfrac{1}{a}\dfrac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = q$ de donde resulta

dividiendo miembro a miembro $\dfrac{p}{q}=a^2\, r^{n-1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{p}{q}\right)^n=a^{2n}\, r^{(n-1)n}=m^2$.

8. Si los términos de lugares $m+1$, $n+1$ y $r+1$ de una $P.A.$ están en $P.G.$ y m, n y r están en $P.H.$, demuestre que el cuociente entre la diferencia d de la $P.A.$ y su primer término a, es igual a $-\dfrac{2}{n}$.

Demostración.

Por demostrar $\frac{d}{a} = -\frac{2}{n}$, en efecto:

$a_{m+1} = a + m\,d,\qquad a_{n+1} = a + n\,d,\qquad a_{r+1} = a + r\,d$, están en $P.G. \Rightarrow$

$$\frac{a\,+\,nd}{a\,+\,md} = \frac{a\,+\,rd}{a\,+\,nd} \Leftrightarrow \frac{1+n\,\frac{d}{a}}{1+m\,\frac{d}{a}} = \frac{1+r\,\frac{d}{a}}{1+n\,\frac{d}{a}} \Leftrightarrow \frac{d}{a} = \frac{m+r-2n}{n^2-mr} \qquad (1),$$

por otra parte: m, n, r en $P.H \Leftrightarrow \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{r}$ en $P.A.$ luego

$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow m + r = 2\dfrac{mr}{n}$ finalmente remplazando en (1), resulta:

$$\frac{d}{a} = \frac{2\frac{mr}{n} - 2n}{n^2 - mr} = \frac{-2(n^2-mr)}{n(n^2-mr)} = -\frac{2}{n}.$$

9. Sea $k, (k \neq 0)$, un número dado. Encontrar los números a, b, c sabiendo que a, b, c están en $P.G.$; a, $b+k$, c están en $P.A.$ y $a+k$, $b+k$, c están en $P.G.$

Solución.

Por hipótesis se tienen: a, b, c en $P.G \Leftrightarrow b^2 = a\,c$ (1)

$a,\ b+k,\ c$ en $P.A. \Leftrightarrow 2(b+k) = a + c$ (2)

$a+k,\ b+k,\ c$ en $P.G. \Leftrightarrow (b+k)^2 = c(a+k)$ (3)

de donde resolviendo el sistema formado por (1), (2) y(3) para a, b y c obtenemos:

$$a = k,\quad b = k\left(1 \pm \sqrt{2}\right)\ \text{ y }\ c = k\left(3 \pm \sqrt{2}\right)$$

10. Si el medio aritmético entre a y b es el doble que el medio geométrico entre a y b, demostrar que

$$\frac{a}{b} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \quad \vee \quad \frac{a}{b} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Solución.

Nos dicen que: $\dfrac{1}{2}(a+b) = 2\ \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16\,ab \Leftrightarrow a^2 - 14ab + b^2 = 0$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 14\,(\dfrac{a}{b}) + 1 = 0$ resolviendo esta ecuación de $2°$ grado obtenemos:

$\dfrac{a}{b} = 7 \pm 4\sqrt{3}$ tomando la raíz positiva, resulta $\dfrac{a}{b} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

analogamente con la raíz negativa $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

11. Si entre dos números cualquiera se han interpolado 2 medios aritméticos $A_1,\ A_2$; dos medios geométricos G_1, G_2 y dos medios armónicos H_1, H_2. Demostrar que:

$$\frac{G_1G_2}{H_1H_2} = \frac{A_1 + A_2}{H_1 + H_2}$$

Solución.

Sean a y b los números cualquiera, entonces:

$a,\ A_1, A_2, b$ están en $P.A.$ $\Leftrightarrow$ $A_1 - a = b - A_2 \Leftrightarrow A_1 + A_2 = a + b$ $\quad(1)$

$a,\ G_1, G_2, b$ están en $P.G.$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{G_1}{a} = \dfrac{b}{G_2} \Leftrightarrow G_1G_2 = a\,b$ $\quad(2)$

$a,\ H_1, H_2, b$ están en $P.H.$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{H_1} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{H_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{H_1} + \dfrac{1}{H_2} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow$

$\dfrac{H_1 + H_2}{H_1H_2} = \dfrac{a+b}{ab}$; remplazando (1) y (2) en ésta última expresión se tiene

$$\tfrac{H_1+H_2}{H_1H_2} = \tfrac{A_1+A_2}{G_1G_2} \Leftrightarrow \frac{G_1G_2}{H_1H_2} = \frac{A_1 + A_2}{H_1 + H_2}$$

4.8. Ejercicios Propuestos

1. En una $P.A.$ cuyo primer término es 4 y el de orden n, 34. Si la suma de los n primeros términos es 247, determine n y la diferencia d.

Respuesta.

13 y $\frac{5}{2}$

2. Sumar 19 términos de la sucesión: $\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{12}, \ldots$

Respuesta.

0

3. Interpolar 9 medios aritméticos entre $\dfrac{1}{4}$ y $-\dfrac{39}{4}$

Respuesta.

$$-\frac{3}{4},\ -\frac{7}{4},\ -\frac{11}{4},\ -\frac{15}{4},\ -\frac{19}{4},\ -\frac{23}{4},\ -\frac{27}{4},\ -\frac{31}{4},\ -\frac{35}{4}.$$

4. Sumar 25 términos de la sucesión: $\dfrac{3}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}, \ldots$

Respuesta.

$15\sqrt{5}$

5. La suma de 4 números enteros de una $P.A.$ es 24 y su producto es 945. Hallar los números.

Respuesta.

3, 5, 7 y 9.

6. Encontrar la suma de todos los números entre 14 y 84 inclusive extrayendo los múltiplos de 3.

Respuesta.

1152

7. Dados tres números en $P.A.$ con diferencia d, $d \in \mathbb{N}$; se sabe que uno de ellos es múltiplo de d. Demostrar que el producto de ellos es divisible por $6d^3$.

8. Si a, b, c están en $P.A.$ y $f(x) = px + q$ en que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con $p \neq 0$. Demuestre que $f(a), f(b), f(c)$ también están en $P.A.$.

9. En la ecuación $x^4 - (3m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$ determinar m tal que sus raíces estén en $P.A.$.

Respuesta.

$m = 2$.

10. Si la suma de m términos de una $P.A.$ es igual a la suma de los siguientes n términos y también a la suma de los siguientes p términos, entonces demostrar que:

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=(m+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$$

11. La suma de cinco términos en una $P.A.$ es 20 y el producto entre el mayor y el menor es -20. ¿Cuáles son los términos?

Respuesta.

$-2,\ 1,\ 4, 7, 10$ o bien $10,\ 7,\ 4, 1,\ -2.$

12. Demuestre que la suma de un número impar de términos consecutivos de un $P.A.$ es igual al término central multiplicado por el número de términos.

13. Una sucesión $a_1, a_2,\ \ldots\ , a_n$ satisface la igualdad $\sum_{k=1}^{n} a_k = 3n^2+2n.$ Demuestre que la sucesión es una progresión aritmética y encuentre una expresión para a_n en términos de n únicamente.

Respuesta.

$a_n = 6n-1$

14. Si en una $P.A.$ la suma de los m primeros términos es igual a la suma de los n primeros términos, demostrar que la suma de los $(m+n)$ términos es nula.

15. En un triángulo rectángulo los lados están en $P.A.$. Demostrar que la diferencia de la progresión es igual al radio de la circunferencia inscrita al triángulo.

16. La suma de tres números en $P.A.$ es 9 y la suma de sus recíprocos es nula. Determine la suma de los 20 primeros términos de esta $P.A.$.

Respuesta.

$30\left(2 \pm 17\sqrt{3}\right)$

17. Una persona contrae una deuda que debe pagar en tres años en cuotas mensuales que se incrementan cada més en una cantidad fija. Si al término de las dos primeros años la persona ha pagado la mitad de la deuda y la primera cuota del tercer año es de $\$122000$. Determine el total que la persona paga al final de los tres años.

Respuesta.

$3.456.000$

18. En una $P.G.$ de 5 términos, la razón es la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es $24.$ Hallar tales términos.

Respuesta.

$8,\, 16,\, 32, 64,\, 128$ o bien $-12,\ 36 - 108, 324,\ -972.$

19. Interpolar 6 medios geométricos entre 14 y $-\dfrac{7}{64}$

Respuesta.

$$-7,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{4}, \frac{7}{8},\ -\frac{7}{16},\ \frac{7}{32}$$

20. La suma de los primeros 5 términos de una $P.G.$ es $422,$ y la suma de los términos segundo al sexto es 633. determine la $P.G.$.

Respuesta.

$32, 48, 72, 108, 162$

21. Dividir el número 221 en tres partes que formen una $P.G.$ de modo que el tercer número sobrepase al primero $136.$

Respuesta.

$17,\ 51,\ 153.$

22. Si $a,\, b,\, c$ están en $P.G.$ y $f(x) = e^x$ en que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función. Demuestre que $f(a),\ f(b),\ f(c)$ también están en $P.G.$.

23. La suma de k números de una $P.G$. de razón 2 es 1533 y el último término es $768.$ Determine los k números y luego calcule la suma de 10 primeros términos de la $P.G.$.

Respuesta.

$k = 9,\ a_1 = 3,\ S_{10} = 3069.$

24. Si cada término de una $P.G.$ se resta del término siguiente, demostrar que las diferencias sucesivas forman otra $P.G.$ con la misma razón que la primera $P.G.$

25. Si $a_1 = 0,\ a_2 = 1, \ldots,\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2});$ demuestre que

$$a_n = \tfrac{2}{3}\left[1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

26. Demostrar que, si:

$$2u_1 = a + b,\ 2u_2 = b + u_1,\ 2u_3 = u_1 + u_2,\ \ldots.$$

entonces $\quad 3\,u_n = a[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n] + b[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n]$

27. Si S es la suma de n números en progresión geométrica y S' es la suma de los recíprocos de dichos números, entonces $S:S'$ es el producto del primer número por el último.

28. Si $S_1, S_2, \ldots, S_p$ son las sumas de las series geométricas de primeros términos 1, $2, \ldots, p$ respectívamente y de razones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{p+1}$ respectivamente, demuestre que:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_p = \frac{1}{2}\,p(p+1)$$

29. Si H es el medio armónico entre a y b, demostrar que

$$\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

30. Si a, b, c están en $P.H.$ demuestre $\quad \dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{c}$

31. Encuentre la suma de n términos de la sucesión

$$a^2+2a,\ a^4+4a,\ a^6+6a,\ a^8+8a,\ \ldots.$$

Respuesta.

$$a^2\,\frac{a^{2n}-1}{a^2-1} + n(n+1)a$$

32. Un químico tiene un pricipitado compuesto de 1 gramo de una sustancia y 1 gramo de impureza. En cada lavado el logra reducir las impurezas en la mitad. ¿Cuántos lavados son necesarios para que la impureza sea menor que 0.0001 gr.

Respuesta.

14 lavados.

33. Una $P.G.$ y una $P.H.$ tienen iguales los términos de lugares m, n, r no consecutivos que son a, b y c. Probar que

$$a(b-c)\,log\,a + b(c-a)\,log\,b + c(a-b)\,log\,c = 0$$

34. Demostrar que el medio armónico entre el medio aritmético y el medio geométrico de a y b es:

$$\frac{2(a+b)}{[\left(\frac{a}{b}\right)^{1/4} + \left(\frac{b}{a}\right)^{1/4}]^2}$$

35. Si a, b, c están en $P.H.$, demuestre que $\frac{1}{2}(2a-b)$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}(2c-b)$ están en $P.G.$

36. Determinar para que valores de x es posible calcular el valor de la serie geométrica y calcule el valor de la serie.

$$1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Respuesta.

$x < -2 \lor x > 0, \; 1 + \frac{1}{x}$

37. Calcular la suma de n términos, de:

a) $S_n = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot$

b) $S_n = 2 + 8x + 18x^2 + 37x^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot$

Respuesta.

a) $\frac{1}{(1-x)^2}\left[1 + \frac{2x(1-x^n)}{1-x} - (n+1)^2 x^n + n^2 x^{n+1}\right]$

b) $\dfrac{14}{3}\dfrac{[1-(2x)^n]}{1-2x} - \dfrac{8}{3}\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{1-\frac{1}{2}\,x}$

38. En un cuadrado de lado a se inscribe otro cuadrado cuyos vértices dividen los lados del primer cuadrado en la razón $1:2$. En el segundo cuadrado se inscribe un tercer cuadrado que divide a los lados del anterior en la misma razón y así sucesívamente. Encontrar la suma de los perímetros y áreas de n de estos cuadrados, cuáles son estas sumas si $n \to \infty$.

Respuesta.

$$P = 4a\frac{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}; \text{ si } n \to \infty \Rightarrow P = \frac{12a}{3-\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{9}{4}a^2\,[1-\left(\frac{5}{9}\right)^n]; \text{ si } n \to \infty \Rightarrow A = \frac{9}{4}a^2$$

39. Si $[S]_r$ es la suma de k términos de una $P.A.$ en que r es el primer término y $(2r-1)$ es su diferencia, demuestre que

$$\sum_{r=1}^{n} [S]_r = \frac{1}{2}\,kn(kn+1)$$

40. En un triángulo equilátero de lado a se unen los puntos medios de sus lados y se forma un triángulo equilátero. En este segundo triángulo se repite el procedimiento y así, sucesívamente. Calcule la suma de los perímetros de todos los triángulos equiláteros así obtenidos y además la suma de sus áreas.

Respuesta.

$P = 6a;\ A = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\, a^2$

41. Tres números están en $P.G.$, si el segundo se aumenta en 8 los números quedan en $P.A.$, pero si en ésta última el tercer término se aumenta en 64 la progresión vuelve a ser geométrica. Encontrar los números.

Respuesta.

$4,\ 12$ y 36 o bien $\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{20}{9},\ \dfrac{100}{9}$

42. Una progresión aritmética y otra progresión geométrica de 3 términos cada una tienen el mismo primer término 4 y también el $2°$ término es el mismo, pero desconocido. El tercer término de la $P.G.$ es $\dfrac{25}{16}$ del tercer término de la $P.A.$. Determinar las progresiones.

Respuesta.

$P.A.:\ 4,\ 10,\ 16$ y $4,\ \dfrac{5}{2},\ 1.$ $P.G.: 4, 10,\ 25$ y $4,\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{25}{16}$

43. En una circunferencia de radio r se inscribe un cuadrado. En este cuadrado se inscribe una circunferencia, en esta se inscribe otro cuadrado y así sucesivamente. Calcule:

La suma de las áreas y perímetros de todos los cuadrados y círculos así formados.

Respuesta.

Círculos: $A = 2\pi r^2;\ P = \dfrac{4\pi r}{2 - \sqrt{2}}$ Cuadrados: $A = 4r^2;\ P = \dfrac{8r}{\sqrt{2} - 1}$

44. Si a, b, c están en progresión aritmética y a, b, d están en progresión armónica, demuestre que:

$$\frac{c}{d} = 1 - 2\left[\,\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}\,\right]$$

45. Dadas las sumas de infinitos términos, con $|r| > 1$:

$$S = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$P = b - \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} - \cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$Q = c + \frac{c}{r^2} + \frac{c}{r^4} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Demuestre que $\dfrac{SP}{Q} = \dfrac{ab}{c}$

46. Calcule la suma de n términos:

a) $1+3x+6x^2+10x^3+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

c) $\left(2n-\frac{1}{2}\right)+\left(5n+1+\frac{1}{6}\right)+\left(8n+2-\frac{1}{18}\right)+\cdot\cdot\cdot\cdot$

Respuesta.

a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}\left[\dfrac{1-x^n}{1-x}-\dfrac{1}{2}n(n+3)x^n+\dfrac{1}{2}n(n+1)x^{n+1}\right]$

b) $n+\dfrac{x^n-1}{(x-1)x^n}+\dfrac{x^{2n}-1}{(x^2-1)x^{2n}}$

c) $\frac{1}{2}n^2(3n+1)+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{3}{8}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n-1\right]$

47. Un empresario contrata un obrero con un sueldo mensual de $\$150000$ y le ofrece dos alternativas de aumento para el futuro.

a) Un aumento variable anual, equivalente al 10% del sueldo del año inmediatamente anterior; y

b) Un aumento fijo anual, equivalente al 20% del sueldo inicial de contratación.

El obrero eligió la segunda alternativa, critique su elección 10 años después.

Respuesta.

Perdió.

48. Un campesino vendió al primero de sus compradores la mitad de sus manzanas más la mitad de una manzana, al segundo, la mitad de las restantes más $\frac{1}{2}$ manzana, al tercero, la mitad de las que quedaron más $\frac{1}{2}$ manzana, y así sucesivamente. El décimo comprador adquirió también la mitad de las manzanas restantes más $\frac{1}{2}$ manzana, agotando con ello la mercadería. ¿Cuántas manzanas tenía el campesino?

Respuesta.

1023

49. Si $S_j=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}j\left(\frac{1}{j+1}\right)^{k-1}$; $j=1,2,\ldots,n$ demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{2}n(n+3)$

50. Si en una $P.G.$ de tres términos, se le suma 11 al primer término y se resta 56 al tercero resulta una $P.A.$ y si en esta última se le suma 1 al tercer término resulta nuevamente una $P.G.$. Determinar los términos de cada una de estas tres progresiones.

Respuesta.

$5, 20, 80;\ 16, 20, 24;\ 16, 20\, 25$ o bien $\frac{5}{4}, \frac{35}{4}, \frac{245}{4};\ \frac{49}{4}, \frac{35}{4}, \frac{21}{4};\ \frac{49}{4}, \frac{35}{4}, \frac{25}{4}$

51. Sea una progresión aritmética con un número par de términos. La suma de los términos que ocupan lugares impares es 161 y la suma de los términos que ocupan lugares pares es 168. Además el último término de la progresión excede al primero en $\frac{27}{2}$. Determine la diferencia d y el número de términos.

Respuesta.

$d = \frac{1}{2},\ n = 14$

52. Si l, m, n están en $P.G.$ y los términos de lugares l, m, n de una $P.A.$ se encuentran en $P.H.$, demuestre que:

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{m-n}{l-m} \ \wedge \qquad \frac{a}{d} = m + 1$$

donde a_n es el término de orden n de la $P.A.$, a su primer término y d su diferencia constante.

53. Un criador de caballos vende un caballo en $3.000.000. Un potencial comprador encuentra que el precio es excesivo, por lo cual el granjero le hace la siguiente proposición: el caballo tiene 7 clavos por cada pata y Ud. debe pagarme $20 por el primer clavo, $30 por el segundo clavo, $45 por el tercero, $67,5 por el cuarto y así sucesivamente hasta completar el último clavo. Si el comprador acepta esta proposición, ¿gana o pierde en el negocio?¿Cuanto?.

Respuesta.

Pierde, $ 408867.72

54. Una deuda de $840.000 se paga en 21 meses con un reajuste mensual constante de $ a. Si después de pagar las 15 primeras cuotas queda una deuda todavía de $ 307.500. Determine el valor de la última cuota.

Respuesta.

55000.

55. La suma de tres números en $P.A.$ es 39, si los números extremos se disminuyen en 3 y el del medio se disminuye en 7 los números quedan en $P.G.$. Determine los números que se encuentran en $P.A.$.

Respuesta.

$5,\ 13,\ 21$ o bien $21,\ 13$ y 5.

56. Una persona tiene un plan de ahorro mensual, mediante el cual el primer mes ahorra $\$A$ y cada mes ahorra el 2% más que lo ahorrado el mes anterior.

a) Exprese en términos de k y A el ahorro correspondiente al k-ésimo mes.

b) Calcule el monto total ahorrado al cabo de k meses.

Respuesta.

a) $A(1.02)^{k-1}$ b) $50A[(1.02)^{k}-1]$

57. Dada la $P.A.$ $\frac{1}{4}, \frac{9}{20}, \frac{13}{20}, \frac{17}{20}, \cdots$ ¿Cuál es el máximo número de términos que es posible sumar sin que la suma supere 2000?.

Respuesta.

140

58. La suma de los $2n$ primeros términos de una $P.G.$, cuyo primer término es a y la razón es r, es igual a la suma de los n primeros términos de otra progresión geométrica cuyo primer término es b y la razón r^2. Demuestre que b es igual a la suma de los dos primeros términos de la primera $P.G.$.

59. Exprese en forma de fracción los siguientes números

a) $2.351835183518...$ b) 0.34279279279 . . .

Respuesta.

a) $\dfrac{23516}{9999}$ b) $\dfrac{761}{2220}$

60. Si S_k es la suma de los k primeros términos de una $P.G.$, demuestre que:

$$S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\left(S_{2n}-S_n\right)^2$$

61. Si $S_{\frac{p}{2}}=1+r^{2p}+r^{4p}+\cdots\cdot(p\,\text{par})$ y

$S_p=1+r^p+r^{2p}+\cdots\cdots$ y $S_p^{'}=1-r^p+r^{2p}-\cdots\cdots$

Demuestre $S_p+S_p^{'}=S_{\frac{p}{2}}$