Taller 6 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Miércoles 19 de Enero, 2011

Nombre:

1. Una sucesión de números reales es una función $X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada número natural n un número real $x(n) = x_n$, llamada el n-ésimo término de la sucesión. Escribimos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente (x_n) para indicar la sucesión cuyo n-ésimo término es x_n.
   Nuestro interés es ver que sucede con una sucesión (x_n) a medida de que el n crece, es decir, si n tiende a infinito, ¿qué ocurre con x_n?.
   Notar que esta noción de poder afirmar que ocurre con una determinada expresión que depende de n cuando n es infinitamente grande, ya ha sido estudiada de manera implícita en este curso, a saber cuando estudiamos sumas de Riemann.
   A continuación, definimos el concepto descrito en el párrafo anterior, o sea el concepto de límite de una sucesión.
   Sea (x_n) una sucesión y a un número real. Diremos que a es el límite de x_n cuando n tiende a infinito y escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - a| < \epsilon$.

   (a) De la definición de límite de una sucesión, concluya que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ es equivalente a decir que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos los x_n con índice $n \geq n_0$, están en el intervalo abierto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ y que la cantidad de x_n que no están en este intervalo es finita.

   (b) Demuestre usando la definición de límite de una sucesión que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

   (Ayuda: Recuerde la demostración vista en Matemáticas 1 de que $inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$)

(c) ¿Como definiría sucesión creciente, decreciente, acotada superiormente, acotada inferiormente y acotada?. En cada caso de un ejemplo de estos tipos de sucesiones.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y considere el conjunto $\mathcal{R}_n = \{\omega_k : k = 0, \cdots, n-1\}$, donde

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

El conjunto $\mathcal{R}_n$ se llama el conjunto de las raíces complejas $n-$ésimas de la unidad.

(a) Para $n = 3$ dibuje el polígono que tiene como vértices los números complejos del conjunto $\mathcal{R}_3$. Demuestre que el polígono obtenido es un polígono regular (esto significa que todos sus lados miden lo mismo y todos sus ángulos interiores también tienen la misma medida).

(b) Calcule el área del polígono dibujado anteriormente.

(c) Realice (a) y (b) para $n = 5$.

(d) Ahora realice los ejercicios (a) y (b) para un valor n cualquiera. Denotaremos por A_n al área del polígono que tiene como vértices los números complejos del conjunto $\mathcal{R}_n$.

(e) Calcule el límite de la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 3}$. Interprete geométricamente este resultado.