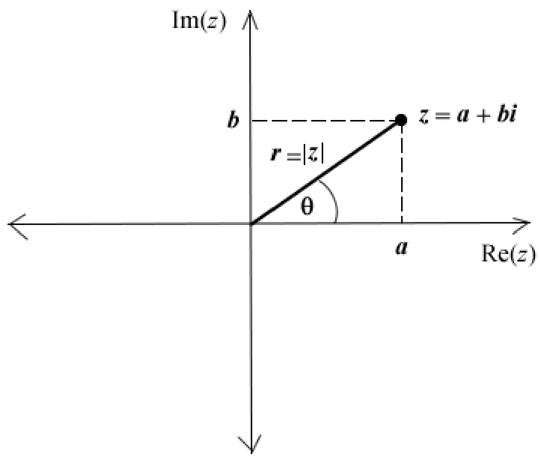
Clase 18 de Enero 2011: Números Complejos

Representación Polar de un complejo

Dado un número complejo $z = a + bi$ consideramos su representación geométrica



Para cada número complejo $z = a + bi$ tenemos asociado su modulo

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que indica la distancia de z al complejo $0 + 0i$ y un ángulo θ formado con el eje parte real de z y la recta que pasa por 0 y z, llamado *Argumento de z*, que podemos calcular

$$\arctan(\theta) = \frac{b}{a}.$$

El ángulo $\theta = \mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$.

Ahora es sencillo verificar, usando trigonometría que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r}, \qquad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{b}{r}$$

así dado un par (r, θ) podemos determinar el complejo $z = a + bi$ donde

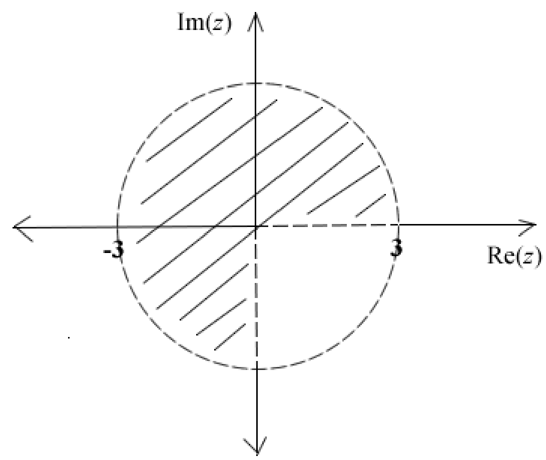
$$a = r\cos(\theta), \qquad b = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Decimos que el complejo z *esta representado en forma polar*, cuando se tiene z descrito por r y θ, es decir

$$z = a + bi = r\cos(\theta) + ir\,\mathrm{sen}(\theta) = r\,(cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

Ejemplo: Grafique el conjunto

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Arg}(z) < \frac{3\pi}{2}\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$$



0.1. Raices de un complejo

Consideramos $z, w \in \mathbb{C}$. Se dice que z es una *raíz n–esima de w* si

$$z^n = w.$$

Por ejemplo el número complejo i es una raíz 2–esima de -1, en efecto por definición tenemos que

$$i^2 = -1$$

Tener la respresentación polar de un número complejo será de gran utilidad a la hora de determinar raices.
Ejemplo: Calcule las raices cúbicas de i.
Tenemos que calcular los números complejos z de forma que

$$z^3 = i$$

La representación polar de i es

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora queremos bucar $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ de forma que $z^3 = i$. Primero tenemos que

$$z^3 = r^3(\cos(3\theta) + i\,\mathrm{sen}(3\theta))$$

ahora igualando con i en coordenadas polares, se tiene

$$r^3(\cos(3\theta) + i\,\mathrm{sen}(3\theta)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

luego

$$\begin{aligned} r^3 &= 1 \\ \cos(3\theta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \mathrm{sen}(3\theta) &= \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

por lo tanto se concluye que $r = 1$ y

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

para $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora como $\theta \in [0, 2\pi[$, se tiene

$$0 \leq \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} < 2\pi$$

así los únicos valores que puede tomar k son $k = 0, 1, 2$.

Con esto concluimos que las raices cúbicas de i son

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ z_2 &= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) \\ z_3 &= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

En general si $w = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ se tiene que sus raices n–esimas estas dadas por

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, .., n-1$$

Raices de un polinomio

Consideramos un polinomio de grado 2 $p(x) = ax^2 + by + c$. Resolver la ecuación $p(x) = 0$ es un interesante problema.
En $\mathbb{R}$ esta ecuación no siempre tiene solución, pues en el caso que el discriminante

$$b^2 - 4ac < 0$$

en $\mathbb{R}$ no sabemos calcular raices.

En los complejos , $\mathbb{C}$, no tenemos problema con raices de números negativos, luego siempre tendremos soluciones.

Este problema para polinomios de grado 2, se generaliza para polinomios de cualquier grado, luego siempre podremos encontrar raices.

, pero en $\mathbb{C}$ siempre tendra.