Cuarta Guía de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

1. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Suponga que $\inf\{f(x) : x \geq 0\} = a \neq 0$. Demuestre que $\int_0^\infty f(x)dx$ diverge.
2. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, positiva y decreciente. Suponga que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$. Demuestre que $\int_0^\infty f(x)dx$ diverge.
3. Para cada $x \in (0, \infty)$, defina $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.
 - (a) ¿Es $\Gamma(x)$ un número real?
 - (b) Calcule $\Gamma(1), \Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$.
 - (c) Demuestre que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

4. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

converge.

5. Decida si las siguientes integrales convergen.

a)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

c)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

b)

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

d)

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

e)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$	l)	$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$
f)	$\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln(x)} dx$	m)	$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$
g)	$\int_0^{\infty} \left \frac{\text{sen}(x)}{x} \right dx$	n)	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
h)	$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$	ñ)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
i)	$\int_0^{\infty} \frac{3x+4}{5x^3+2x+1} dx$	o)	$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx$
j)	$\int_1^{\infty} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$	p)	$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$
k)	$\int_1^{\infty} \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$	q)	$\int_0^1 \left \frac{1}{\sqrt{x}} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right dx$

6. La velocidad promedio de moléculas en un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right) \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(\frac{-Mv^2}{2RT}\right) dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas y v es la velocidad molecular. Demuestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{M\pi}}$$

7. Hallar todos los vectores (x, y, z) que satisfagan la relación

$$\langle (x, y, z), (0, 0, 1) \times (6, 3, 4) \rangle = 3$$

8. Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.

9. Considere los vectores $u = (-1, 0, 2)$, $v = (2, 1, -1)$, $w = (1, 2, 2)$.
Calcule los siguientes productos:

(a) $u \times v$

(b) $(u \times v) \times w$

(c) $u \times (v \times w)$

(d) $(u \times v) \times (u \times w)$

10. Calcule el área del triángulo de vértices

(a) $P = (0, 2, 2)$, $Q = (2, 0, -1)$ y $R = (3, 4, 0)$

(b) $P = (-2, 3, 1)$, $Q = (1, -3, 4)$ y $R = (1, 2, 1)$

11. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos

$$P = (1, 0, 1), Q = (-1, 1, 1), R = (2, -1, 2)$$

(a) Encuentre todos los puntos S que pueden ser el cuarto vértice del paralelogramo.

(b) Calcular el área del triángulo PQR .

12. Calcular el producto mixto $\langle u, v \times w \rangle$ en cada caso

(a) $u = (3, 0, 0)$, $v = (0, 4, 0)$, $w = (0, 0, 8)$.

(b) $u = (2, 3, -1)$, $v = (3, -7, 5)$, $w = (1, -5, 2)$.

13. Hallar todos los números reales t para los que los vectores u, v y w no estén en el mismo plano, donde

$$u = (1, t, 1), \quad v = (t, 1, 0), \quad w = (0, 1, t)$$

14. Un plano tiene como ecuación cartesiana $x + 2y - 2z + 7 = 0$. Hallar
- (a) Un vector normal de longitud 1.
 - (b) La distancia del plano al origen.
 - (c) El punto Q del plano más próximo al origen.
15. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(1, 2, -3)$ y es paralelo al plano $3x - y + 2z = 4$. ¿Cuál es la distancia entre los dos planos?.
16. Un punto se desplaza en el espacio de modo que en el instante t su posición viene dada por el vector $X(t) = (1 - t, 2 - 3t, 2t - 1)$.
- (a) Demostrar que el punto se mueve a lo largo de una recta L .
 - (b) Encuentre el vector director de L .
 - (c) ¿En que instante el punto toca al plano $2x + 3y + 2z + 1 = 0$
 - (d) Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo al dado en c. y que contenga al punto $X(3)$.
 - (e) Hallar la ecuación cartesiana del plano perpendicular a L que contenga al punto $X(2)$.