Taller 5 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Miércoles 12 de Enero, 2011

Nombre:

1. Hemos estudiado la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde f es una función acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$. El Teorema Fundamental del Calculo, el cuál hemos usado para calcular integrales definidas, pide que f sea continua en $[a,b]$.
Estudiaremos ahora integrales de funciones que no cumplen estos requisitos, es decir que cualquiera de los dos o los dos límites de integración son infinitos o f tiene un número finito de discontinuidades infinitas en el intervalo $[a,b]$. La integrales de funciones que tienen estas caracteristicas se llaman *integrales impropias.*
Sea $f:[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Análogamente, si $f:(-\infty,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función continua,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

En ambos casos, si el límite existe dicimos que la integral impropia converge y el valor del límite es el valor de la integral. En caso contrario diremos que la integral impropia no converge o diverge.

(a) Sea $f:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^{-s}$, con $s\in\mathbb{R}$. Analíce para que valores de s la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

converge y diverge. Determine el valor de la integral impropia cuando ella es convergente.

(b) Sea $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x; 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$ y haga girar R en torno al eje x. Demuestre que el volumen del sólido de revolución obtenido es finito. La superficie de este sólido de revolución se conoce como la *Trompeta de Gabriel.*

(c) Sea $f : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Según las definiciónes dadas anteriormente, las propiedades de la integral y el álgebra de límites, ¿como definiría la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx?$$

(d) Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

2. Considere el plano Π con ecuaciones $ax + by + cz = d$ y un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que no pertenece al plano.

   a) Encuentre un vector normal de Π. A este vector lo llamaremos N.

   b) Calcule la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por P y tiene como vector director a N.

   c) Demuestre que $\mathcal{L} \cap \Pi = \{Q\}$ donde Q es un punto.

   d) Usando lo anterior ¿Es posible determinar la distancia del punto P al plano Π. En caso de ser posible determinela.