Pauta Control 4 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

Tiempo : 30 minutos .

Nombre:

1. Calcule
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$
Ayuda: Note que $\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$.

   <u>Solución:</u>
   Sea $f:[1,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}$, $P_n=\left\{x_k=1+\frac{k}{n}:0\leq k\leq n\right\}$ y $x_k^*=x_k$ entonces
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})$$
corresponde a una suma de Riemann. Como f es continua en $[1,2]$, se tiene que f es integrable en $[1,2]$. Luego
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})=\int_1^2 f(x)dx$$
donde
$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx=ln(x)|_1^2=ln(2)-ln(1)=ln(2)$$
Por tanto
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=ln(2)$$

2. Considere $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$. Determine $B\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de forma que
$$AB=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

Solución:

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Queremos encontrar los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+3c & -b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + 2c &= 0 \\ -a + 3c &= 1 \\ b + 2d &= -1 \\ -b + 3d &= 1 \end{aligned}$$

El sistema anterior se puede ver como dos sistemas con dos incognitas. Luego nos es difícil ver que las soluciones son:

$$a = -\frac{2}{5} \quad , \quad c = \frac{1}{5} \quad , \quad d = 0 \quad , \quad b = -1$$

Finalmente la matriz $B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$