Segunda Guía de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

1. Calcule las siguientes primitivas:

   a)
   $$\int cos^2(x)dx$$

   b)
   $$\int \frac{1}{1+sen(x)}dx$$

   c)
   $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

   d)
   $$\int xsec^2(x^2+3)dx$$

   e)
   $$\int x^2cos(x)dx$$

   f)
   $$\int 5xsen(x^2)dx$$

   g)
   $$\int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

   h)
   $$\int x\sqrt{1+x}dx$$

   i)
   $$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

2. Si
   $$A = \int_0^{\pi} \frac{sen(x)}{2+x}dx$$
   calcule
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)cos(x)}{1+x}dx$$
   en función de A.

3. Encuentre $a > 0$ tal que
   $$\int_{-a}^{a}(1-|x|)dx = 0$$

4. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, muestre que existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

5. Calcule los siguientes límites:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} sen\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[3]{k}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \pi\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\left[cos\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) - cos\left(\frac{(n-k+1)\pi}{2n}\right)\right]\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right)$$

(e)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2-k^2}$$

6. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que $AB = BA = (0)_{3\times 3}$, $AC = A$ y $CA = C$.

b) Solo usando la letra a) (no multiplicar las matrices) pruebe que

1) $ACB = CBA$
2) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
3) $(A+B)^2 = (A-B)^2 = A^2 + B^2$

7. Una matriz A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

   a) Pruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es idempotente.

   b) Si A es una matriz idempotente demuestre que $B = I - A$ es idempotente y $AB = BA = (0)$.

   c) Determine todas las matrices $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que A sea idempotente.

8. Una matriz A se dice *involutiva* si $A^2 = I$.

   a) Pruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ es involutiva.

   b) Si A es una matriz involutiva demuestre que la matriz

   $$B = \frac{1}{2}(Id + A)$$

   es involutiva. ¿Qué puede decir de la matriz

   $$C = \frac{1}{2}(I - A)?$$

   Pruebe que $BC = (0)$.

   c) Determine todas las matrices $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que A sea involutiva.

9. Sabiendo que la inversa de A es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y que la inversa de AB es $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule B.

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

    (a)

    $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} y - 3z + 4w &= 5 \\ x - 2z + 3w &= -4 \\ 3x + 2y - 5w &= 12 \\ 4x + 3y - 5z &= 5 \end{aligned}$$

11. Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} mx + y - z &= 0 \\ 2x + my + z &= 0 \\ y + mz &= 0 \end{aligned}$$

Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$ de forma que

a) El sistema no tenga soluciones.

b) El sistema tenga única solución. Determine la solución.

c) El sistema tenga infinitas soluciones. Determine las soluciones.

12. En un café de la ciudad, un día consumí un jugo dos cafés y un sandwich y pagué \$1200. Otro día junto a unos amigos consumimos tres jugos, cuatro cafés y cinco sandwichs y pagamos \$3800. Si otro día consumimos cuatro jugos, dos cafés y diez sandwichs. ¿Cuánto debemos pagar?¿Falta información para responder a la pregunta?¿Cómo decidir?.

13. Siete diputados en siete comisiones están distribuidos como se describe en la siguiente la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde las columnas representan los distintos comisiones y las filas a los diputados, ponemos un 1 en el lugar (i, j) si el $i-$esimo diputado está en la $j-$esima comisión y un 0 en caso contrario, por ejemplo, el primer diputado está en la primera comisión, en la segunda y en la sexta.¿Qué información guarda JA y AJ^t? donde $J = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.
¿Es cierto que para cada par de diputados existe solo una comisión que los contiene?.
¿Es cieto que cada par de comisiones tiene solo un diputado en común?.
(Si $J = (a_{ij})_{m\times n}$ se llama J^t la matriz traspuesta de J y se define $J^t = (b_{ij})_{n\times m}$ donde $b_{ij} = a_{ji}$, en otras palabras las filas de la matriz J^t son las columnas de la matriz J.)