Primera Guía de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

1. Un auto se detiene cinco segundos después de que el conductor aplicó los frenos; mientras estos se aplican, se registran las siguientes velocidades

Tiempo (seg)	0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	5
Velocidad (Km/h)	100	82	71	60	40	26	15	0

   a) Haga un cálculo alto y uno bajo de la distancia recorrida por el auto después de que se aplicaron los frenos.

   b) En un esquema de velocidad contra tiempo, muestre cálculos altos y bajos, y la diferencia entre ellos.

2. Rogelio decide correr un maratón y trás él, en bicicleta, irá su amiga Guillermina para medirle la velocidad cada $15min$. Rogelio empieza con fuerza, pero después de una hora y media está tan cansado que tiene que detenerse. La información que Guillermina tomó se resume en la siguiente tabla:

Tiempo (min)	0	15	30	45	60	75	90
Velocidad (m/h)	12	11	10	10	8	7	0

   a) Si se supone que la velocidad de Rogelio es siempre decreciente, obtenga los cálculos alto y bajo de la distancia que recorrió durante la primera media hora.

   b) Dé los cálculos alto y bajo de la distancia total recorrida.

   c) ¿Con qué frecuencia hubiese necesitado Guillermina medir el paso de Rogelio para hallar los cálculos alto y bajo, con diferencia de no más de 0,1 millas de distancia real recorrida?

3. Un mecanismo cíclico hace que se mueva una bolita en una línea recta. La velocidad de la bolita en el instante t viene dada por la función $v(t) = 2sen(\pi t)$. (t está medido en horas y v está medido en m/h) Aproxime la distancia recorrida por la bolita en el lapso de una hora.

4. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y P una partición de $[a,b]$. ¿Qué relación hay entre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ y $S(f,P)$ y entre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ y $s(f,P)$?.

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que para cualquier partición P se tiene que $S(f,P) = s(f,P)$. ¿Es f una función constante?.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demuestre que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables, ¿ Es cierto que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)?$$

8. Sea f continua y no negativa en $[a,b]$ tal que existe $\xi \in [a,b]$ con $f(\xi) > 0$, entonces pruebe que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

9. Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tal que $inf(f-g) = 0$. Suponga que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > g(c)$. Demuestre que
$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$

10. Demuestre que
$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx \leq 1$$

11. Considere $n \in \mathbb{N}$ y defina $I_n = \displaystyle\int_0^n [x]dx$. Encuentra el valor de I_n en términos de n.

12. Para cada $x \in \mathbb{R}$ defina $I(x) = \displaystyle\int_0^x [t]dt$. Grafica I.

13. Considera $n \in \mathbb{Z}$, ¿Cuál es el valor de la integral $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|dx$?.

14. Demuestre que
$$2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1}dx \leq 2\sqrt{2}$$

15. Demuestre que
$$\frac{1}{16} < \int_1^3 \frac{1}{x^3+x+2}dx < \frac{1}{3}$$

16. Si f es par y $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = A$. Calcula $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$, en términos de A.

17. El teorema fundamental del calculo dice que cualquier función continua tiene una función primitiva. Encuentre la primitiva F de $f(x) = |x|$, tal que $F(0) = 0$.

18. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t)dt$. ¿Es F una función diferenciable?. De ser así, encuentre F'. (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)

19. Considere la función $G : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por
$$G(x) = \int_0^x \frac{x^2+1}{t^2+1}dt$$
Demuestre que G es diferenciable y encuentre $G'(x)$.

20. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x^2 f(t)dt$.

21. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Defina $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $G(x) = \int_x^b f(t)dt$. Demuestre que G es diferenciable y encuentre G'.

22. Considere la función $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^{x^2} xcos(t)dt$. Calcule $F'(\sqrt{\pi})$.

23. Demuestre que
$$\int_1^4 \frac{1}{t}dt > 1$$

24. Sin hacer cálculos explique por que
$$\int_{2\pi}^{4\pi} cos(x)dx = 0$$

25. Sin hacer cálculos explique por que

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx = \int_0^{\pi} sen(x)dx$$

26. Calcule las siguientes integrales:

    a) $\int_{-2}^{3} |t|dt$
    b) $\int_0^{\pi} sen(t)dt$
    c) $\int_0^{\pi} tsen(t)dt$
    d) $\int_0^{\pi} cos(x)sen(x)dx$
    e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(z)dz$
    f) $\int_1^4 u\sqrt{u}du$
    g) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
    h) $\int_{\pi}^{2\pi} ucos(u^2)du$
    i) $\int_0^1 x\sqrt{2-x}dx$
    j) $\int_0^{\pi} t^2sen(t)dt$

27. ¿Es $Ax^2 + By^2 = C$, con A, B y C números positivos, la ecuación de una elipse?

28. Dados dos puntos P y Q describa el conjunto de puntos X tales que la distancia de P a X es igual a la distancia de X a Q.

29. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene por focos a $F_1 = (2, 1)$ y $F_2 = (3, 1)$, y el semieje mayor mide 6. Grafique la elipse.

30. Encuentre la ecuación de la parábola de foco $(3, 1)$ y directriz $x+1 = 0$.

31. Grafique el conjunto de puntos P cuya distancia al eje Y es cuatro veces su distancia al punto $(5, 0)$.

32. Dado un punto P y una recta L describa el conjunto de puntos X tales que $d(P, X) = \frac{1}{2}d(P, L)$.

33. Encuentre el área de una elipse de semieje mayor a y semiejemenor b.

34. Sean a y b números positivos fijos. Considere el conjunto

$$E = \{(acos(t), bsen(t))/\ t \in [0, 2\pi)\}.$$

¿Qué conjunto describe E?

35. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $bx^2 + ay^2 = a^2b^2$ en el punto (x_0, y_0)?

36. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $bx^2 - ay^2 = a^2b^2$ en el punto (x_0, y_0)?

37. La máxima distancia de la tierra al sol es $94,56$ millones de millas y su distancia mínima es $91,45$ millones de millas. ¿Cuánto mide el semieje mayor y menor?

38. Grafique los siguientes conjuntos, describiendo focos, semiejes mayores y menores, directrices, vértices, asintotas, etc:

    a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 - y^2 = 0\}$
    b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2 + 4y^2 = 1\}$
    c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 16x^2 - 9y^2 = 144\}$
    d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2 + 9y^2 = -1\}$
    e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x + 4y^2 = 1\}$
    f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 3x^2 + 6x + y^2 + 6y = 10\}$
    g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 5x^2 - 20x - 2y^2 + 4y = 18\}$