Taller 4 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Miércoles 5 de Enero, 2011

Nombre:

1. Un *sólido de revolución* S, es un objeto en $\mathbb{R}^3$ que se obtiene al hacer girar una región R del plano en torno a una recta L llamada *eje de revolución*.
   Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a, b]$, la región del plano $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$ y S el sólido de revolución obtenido al hacer rotar R en torno a la recta $L : y = 0$ o el eje x. Nos interesa calcular $V(S)$, el volúmen de S.
   A continuación encontraremos el valor de $V(S)$ de la siguiente manera:

   (a) Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y la partición regular del intervalo $[a, b]$

   $$P_n = \left\{ x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} : 0 \leq k \leq n \right\}$$

   Sea $x_k^* = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \in [x_{k-1}, x_k]$, punto medio de cada intervalo k-ésimo de la partición P_n con $k = 1, 2, \ldots, n$.
   Sea R_k el rectángulo de altura $f(x_k^*)$ y ancho $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$. Calcule el volúmen $V(S_k)$, donde S_k es el sólido obtenido al girar en torno al eje x el región R_k.

   (b) Muestre que

   $$\sum_{k=1}^{n} V(S_k)$$

   es una suma de Riemann.

   (c) Muestre que

   $$V(S) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(d) Usando (c) demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2. Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua en $[a,b]$. Se quiere calcular la longitud L del arco cuyos puntos extremos son $p(a,f(a))$ y $q(b,f(b))$. Este calculo lo haremos de la siguiente manera:

(a) Sea $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ partición regular de $[a,b]$. Calcule la longitud L_k de cada segmentos de punto inicial $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y punto terminal $(x_k, f(x_k))$.

(b) Muestre que

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1})$$

(c) Utilice Teorema del Valor Medio para concluir que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(x_k - x_{k-1})$$

donde $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

(d) Muestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(x_k - x_{k-1})$$

es una suma de Riemann y concluya que

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

(e) Usando (d) demuestre que el perimetro de una circunferencia de radio r es $2\pi r$.