

Pauta Control 3 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

Tiempo : 15 minutos .

Nombre:

Elija solo un problema.

1. Calcula la integral

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$$

Solución 1:

Sea $u = 2x+1$, entonces $\frac{u-1}{2} = x$ y $\frac{1}{2} du = dx$. Reemplazando resulta

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \frac{1}{4} \int_1^9 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$$

Pero

$$\frac{1}{4} \int_1^9 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \int_1^9 u^{1/2} - u^{-1/2} du = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} (9^{3/2} - 1) - 2(\sqrt{9} - 1) \right]$$

Por tanto

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} \times 26 - 4 \right] = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3}$$

Solución 2:

Sea $u = \sqrt{2x+1}$, entonces $\frac{u^2-1}{2} = x$ y $du = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx$. Reemplazando resulta

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2 - 1 du$$

Pero

$$\frac{1}{2} \int_1^3 u^2 - 1 du = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) - 2 \right]$$

Por tanto

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{26}{3} - 2 \right] = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3}$$

Observación 0.1 *Notar que se puede integrar por partes, considerando la integral*

$$\frac{1}{2} \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{1+2x}} \cdot x dx$$

y haciendo $g(x) = \sqrt{1+2x}$ y $f(x) = x$ en la fórmula

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

2. Calcula la integral

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx$$

Solución:

Integrando por partes se tiene:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$$

Integrando por partes nuevamente se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2[-x \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx] \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2[0 + 1] = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$