Pauta Control 1 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sean A y A' dos conjuntos de números reales tales que A es acotado y $A' \subset A$. Suponga que para cada $a \in A$ existe $a' \in A'$ tal que $a \leq a'$. Demuestre que $Sup(A') = Sup(A)$.

   Solución:

   Como A es acotado y $A' \subset A$ entonces A' es acotado, en particular A y A' son acotados superiormente.
   Sabemos que $a \leq Sup(A)$ para todo $a \in A$ en particular $a \leq Sup(A)$ para todo $a \in A'$, puesto que $A' \subset A$ entonces $Sup(A)$ es cota superior de A'.
   Supongamos $c < Sup(A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $c < a$. Por hipótesis existe $a' \in A'$ tal que $a \leq a'$ entonces $c < a'$. Esto implica que $Sup(A)$ es la menor cota superior de A' o sea que $Sup(A') = Sup(A)$.

2. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Encuentre $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(f, P_n) - s(f, P_n) < 10^{-3}$, donde

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

   Solución:

   Sea $t_i = \frac{i}{n}$ con $i = 0, 1, \ldots, n$ los puntos de la partición P_n entonces como f es decreciente se tiene que

$$m_i = Inf\{f(x) : x \in [t_{i-1} - t_i]\} = f(t_i)$$

$$M_i = Sup\{f(x) : x \in [t_{i-1} - t_i]\} = f(t_{i-1})$$

   para todo $i = 1, \ldots, n$.
   Luego

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{1}{n}$$

$$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\frac{1}{n}$$

Por tanto

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(t_{i-1}) - f(t_i)) = \frac{1}{n}(f(t_0) - f(t_n))$$

puesto que

$$\sum_{i=1}^{n}(f(t_{i-1}) - f(t_i))$$

corresponde a una suma telescópica.
Como $f(t_0) = f(0) = 1$ y $f(t_n) = f(1) = 0$, se tiene que

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{1}{n}$$

Se quiere determinar $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(f,P_n) - s(f,P_n) < 10^{-3}$ entonces $\frac{1}{n} < 10^{-3}$ lo que equivale a decir que $1000 < n$, o sea que por ejemplo para $n = 1001$ se tiene lo pedido.