# Pauta Prueba 1 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 28 de Diciembre, 2010.

Tiempo: 120 minutos.

**Nombre:**

1. Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} sen(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Considere la partición $P$ del intervalo $[0,2]$,

$$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$$

(a) Calcule $S(f,P)$ y $s(f,P)$.

Solución:

Notar que

$$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\} = \left\{t_k = \frac{2k}{8} = \frac{k}{4} : k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8\right\}$$

Entonces

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{8} M_k(t_k - t_{k-1}) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} M_k$$

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{8} m_k(t_k - t_{k-1}) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} m_k$$

donde

$$M_k = Sup\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$$
$$m_k = Inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$$

Como $f$ es creciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y decreciente en $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
M_1 &= f\left(\frac{1}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
m_1 &= f(0) = sen(0) = 0 \\
M_2 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
m_2 &= f\left(\frac{1}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
M_3 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
m_3 &= f\left(\frac{3}{4}\right) = sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
M_4 &= f\left(\frac{3}{4}\right) = sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
m_4 &= f(1) = sen(\pi) = 0 \\
M_5 &= f(1) = sen(\pi) = 0 \\
m_5 &= f\left(\frac{5}{4}\right) = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{16} \\
M_6 &= f\left(\frac{5}{4}\right) = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{16} \\
m_6 &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{4} \\
M_7 &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{4} \\
m_7 &= f\left(\frac{7}{4}\right) = -\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{7}{4}\right) - 1 = -\frac{9}{16} \\
M_8 &= f\left(\frac{7}{4}\right) = -\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{7}{4}\right) - 1 = -\frac{9}{16} \\
m_8 &= f(2) = -(2)^2 + 2(2) - 1 = -1
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} M_k \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\frac{1}{16}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{9}{16}\right)\right) \\
&= \frac{8\sqrt{2}+9}{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(f,P) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} m_k \\
&= \frac{1}{4}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\frac{1}{16}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{9}{16}\right)+(-1)\right) \\
&= \frac{8\sqrt{2}-15}{32}
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que $f$ es integrable en $[0,2]$ y encuentre el valor de $\int_0^2 f(x)dx$.

<u>Solución:</u>

Notar que $f$ es una función continua en $[0,2]$, de hecho basta ver la continuidad en $x=1$. En efecto vemos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} sen(\pi x) = sen(\pi) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x^2+2x-1 = -(1)^2+2(1)-1 = 0$$

entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$.
Como $f$ es una función continua en $[0,2]$, $f$ es integrable en $[0,2]$.
Por la definición de $f$ y usando propiedades de la integral, vemos que

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 sen(\pi x)dx + \int_1^2 (-x^2+2x-1)dx$$

donde

$$\int_0^1 sen(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen(u)du = \frac{1}{\pi}(-cos(u)|_0^{\pi}) = \frac{2}{\pi}$$

$$\int_1^2 (-x^2+2x-1)dx = -\int_1^2 (x-1)^2 dx = -\int_0^2 u^2 du = -\left(\frac{u^3}{3}|_0^1\right) = -\frac{1}{3}$$

Por tanto

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} = \frac{6-\pi}{3\pi}$$

(c) Considere la región del plano $R$ acotada por el gráfico de $f$, el eje $x$ y la recta $x = 2$. Calcule el área de la región $R$.

<u>Solución:</u>

Notar que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$ y $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [1,2]$ entonces el área de la región $R$ está determinada por

$$A(R) = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 -f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$$

Por la parte (b), se tiene que

$$A(R) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3} = \frac{6+\pi}{3\pi}$$

2. Resuelva los siguientes ejercicios.

(a) Sea $f$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea $F$ una antiderivada o primitiva de $f$. Demuestre que

$$\int_a^b (cos(x)f(x) - sen(x)F(x))dx = cos(b)F(b) - cos(a)F(a)$$

<u>Solución:</u>

Como $F$ es una primitiva de $f$, se tiene que $F' = f$. Ahora notamos que

$$(cos(x)F(x))' = -sen(x)F(x) + cos(x)F'(x) = cos(x)f(x) - sen(x)F(x)$$

Es decir, $G(x) = cos(x)F(x)$ es una primitiva de la función continua $g(x) = cos(x)f(x) - sen(x)F(x)$ en $[a, b]$. Por tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx &= \int_a^b (cos(x)f(x) - sen(x)F(x))dx \\ &= G(x)|_a^b \\ &= cos(x)F(x)|_a^b \\ &= cos(b)F(b) - cos(a)F(a)\end{aligned}$$

(b) Calcule

$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$$

Solución:

Sea $u = \sqrt{x} + 1$ entonces $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Luego

$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int_2^3 2u^2 du = 2\frac{u^3}{3}|_2^3 = \frac{38}{3}$$

(c) Encuentre la familia de primitivas

$$\int xcos^2(x)dx$$

(Ayuda: Considere la identidad $cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$).

Solución:

Notar que

$$\begin{aligned}\int xcos^2(x)dx &= \int xcos^2(x)dx \\ &= \int x\left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int xdx + \int xcos(2x)dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + c_1 + \int xcos(2x)dx\right)\end{aligned}$$

Sea $u = x$ y $dv = cos(2x)$ entonces $du = dx$ y $v = \frac{sen(2x)}{2}$, luego

$$\int xcos(2x)dx = \frac{xsen(2x)}{2} - \int \frac{sen(2x)}{2}dx = \frac{xsen(2x)}{2} + \frac{cos(2x)}{4} + c_2$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int xcos^2(x)dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + c_1 + \frac{xsen(2x)}{2} + \frac{cos(2x)}{4} + c_2\right) \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{xsen(2x)}{4} + \frac{cos(2x)}{8} + c\end{aligned}$$

3. Considere la ecuación $5x^2 + 10x - y^2 + 4y = 24$.

(a) Demuestre que esta ecuación representa una hipérbola. Indique cuales son sus vertices, focos y centro.

Solución:

Para probar que la ecuación representa una hipérbola es necesario completar cuadrado

$$\begin{aligned}5x^2 + 10x - y^2 + 4y &= 24 \\ 5(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) &= 24 \\ 5(x^2 + 2x + 1 - 1) - (y^2 - 4y + 4 - 4) &= 24 \\ 5(x+1)^2 - 5 - (y-2)^2 + 4 &= 24 \\ \frac{(x+1)^2}{5} - \frac{(y-2)^2}{25} &= 1\end{aligned}$$

Luego por la forma de la ecuación obtenemos que es una hipérbola. Su centro es $(-1, 2)$. Sus vertices son $(-1-\sqrt{5}, 2)$ y $(-1+\sqrt{5}, 2)$. Sus focos son $(-1-\sqrt{30}, 2)$ y $(-1+\sqrt{30}, 2)$.

(b) Calcule las asíntotas de esta hipérbola. ¿Existe otra hipérbola que tenga las mismas asíntotas?. Si su respuesta es afirmativa encuentre la ecuación que representa esta hipérbola.

Solución:

Las asíntotas de esta hipérbola tienen ecuaciones

$$L_1 : y - 2 = \sqrt{5}(x + 1)$$

$$L_2 : y - 2 = -\sqrt{5}(x + 1)$$

Estas ecuaciones vienen dadas por el hecho que son traslaciones de las rectas que pasan por el origen que tienen pendiente $\pm\frac{b}{a}$, donde en este caso $b = 5$ y $a = \sqrt{5}$.
Podemos notar que la siguiente ecuación tambien representa una hiperbola:

$$\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$

La diferencia es que para esta hipérbola sus vertices son $(-1, -3)$ y $(-1, 7)$. Es claro que esta hiperbola también tiene como asintotas las rectas $L_1$ y $L_2$.