Taller 3 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Miércoles 29 de Diciembre, 2010

Nombre:

1. Considere la función $L : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

que fué estudiada en el taller anterior, es decir en el taller 2. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) $L(xy) = L(x) + L(y)$, para todo $x, y \in (0, +\infty)$.

(b) $L(x^{-1}) = -L(x)$, para todo $x \in (0, +\infty)$.

2. Según lo realizado en el taller 2, podemos afirmar que $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ es una función biyectiva, ¿por qué?. Denotemos por E la función inversa de L, es decir $E : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definida por $E(x) = y$ si y solo si $L(y) = x$. (Por ejemplo $E(0) = 1$, puesto que $L(1) = 0$). Demuestre las siguientes proposiciones:

(a) E es derivable con $E'(x) = E(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) E es estrictamente creciente y concava hacia arriba.

(c) ¿Que puede decir de $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x)$ y de $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x)$?. ¿Cuál es el gráfico de E?.

(d) $E(x + y) = E(x)E(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Considere una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y las matrices

$$E_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E_{2,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule la matriz $B = E_1(\lambda)A$. ¿Qué sucede con las filas de la matriz A en comparacioń con las filas de la matriz B?.

(b) Calcule la matriz $B = E_{2,3}A$. ¿Qué sucede con las filas de la matriz A en comparacioń con las filas de la matriz B?.

(c) Calcule la matriz $B = E_{2,3}(\lambda)A$. ¿Qué sucede con las filas de matriz A en comparacioń con las filas de la matriz B?.

(d) Exprese la matriz $C = \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x+5u & y+5v & z+5w \\ u & v & w \end{pmatrix}$ como producto de las matrices A y E dadas al inicio.