Pauta Control 2 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

Tiempo : 30 minutos .

Nombre:

1. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y defina

$$G(x) = \int_0^{2x} \cos(x)f(t)dt$$

Encuentre $G'(0)$.

Solución:

Notar que

$$G(x) = \int_0^{2x} \cos(x)f(t)dt = \cos(x) \int_0^{2x} f(t)dt$$

entonces se tiene que

$$G'(x) = (\cos(x) \int_0^{2x} f(t)dt)' = -\operatorname{sen}(x) \int_0^{2x} f(t)dt + \cos(x) \left(\int_0^{2x} f(t)dt \right)'$$

Sea $h(x) = 2x$ y $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ entonces vemos que

$$\int_0^{2x} f(t)dt = F(h(x)) = (F \circ h)(x)$$

Como f es continua en $[0, +\infty)$, por Teorema Fundamental Calculo se tiene que F es diferenciable con $F'(x) = f(x)$.

Por tanto

$$\left(\int_0^{2x} f(t)dt \right)' = (F(h(x)))' = F'(h(x))h'(x) = f(h(x))2 = 2f(2x)$$

De esta forma vemos que

$$G'(x) = (\cos(x) \int_0^{2x} f(t)dt)' = -\operatorname{sen}(x) \int_0^{2x} f(t)dt + 2f(2x)\cos(x)$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $G'(0) = 2f(0)$.

2. Encuentre la ecuación que define el siguiente conjunto:

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / d((x, y), (0, 6)) = \frac{3}{2} d((x, y), \mathcal{L}) \right\}$$

donde $\mathcal{L}$ es la recta determinada por la ecuación $y = \frac{8}{3}$. Determine que cónica representa el conjunto B .

Solución

Recuerde que $d((x, y), \mathcal{L}) = \sqrt{(x - x)^2 + (y - \frac{8}{3})^2} = \sqrt{(y - \frac{8}{3})^2}$.

Ahora para encontrar la ecuación que define este conjunto tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 6)^2} &= \frac{3}{2} \sqrt{\left(y - \frac{8}{3}\right)^2} \quad |()^2 \\ x^2 + (y - 6)^2 &= \frac{9}{4} \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 \\ x^2 + y^2 - 12y + 36 &= \frac{9}{4} \left(y^2 - \frac{16}{3}y + \frac{64}{9}\right) \\ 20 &= \frac{5}{4}y^2 - x^2 \\ 1 &= \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} \end{aligned}$$

Luego la ecuación que define el conjunto B es: $1 = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20}$ y corresponde a ser una hipérbola.