

# Guía Control Recuperativo, Matemáticas I

Felipe Núñez Olivares

21 de noviembre de 2010

1. Demuestra que para cualquier valor de  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} \geq \frac{1}{2}$$

2. Demuestre usando inducción las siguientes proposiciones:

- a)  $P(n) : n^3 - n$  es divisible por 6.
- b)  $P(n) : 2^{2n+1} + 1$  es divisible por 3.
- c)  $P(n) : 11^n - 4^n$  es divisible por 7.

3. Sea  $m \in \mathbb{N}$ , muestre que:

$$\sum_{k=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} 2k - 1 = m^3$$

4. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , demuestre que ;

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$$

5. En el juego de poker se reparten 5 cartas de un mazo inglés de 52 cartas. Se llama trio a la jugada donde hay tres cartas del mismo número, las otras dos pueden ser cualesquiera, pero distinto número entre ellas y de distinto número de las del trio. Determine de cuántas maneras puede salir un trio en una mano de poker. Si las otras dos cartas son un par, es decir, dos cartas iguales pero diferentes a las del trio, se tiene un full. De cuántas maneras puede obtenerse un full.
6. Un juego se juega con monedas y un dado. Primero lanzas el dado y luego lanzas tantas monedas como marca el dado. Ganas si obtienes tres caras o más. Determina de cuantas maneras distintas se puede ganar el juego.

7. Calcular la suma

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k}$$

8. Encuentre todos los números  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $|x| < x^2$ , determinando si es un conjunto acotado.
9. Considerar el conjunto

$$A = \left\{ \frac{n+3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Es  $A$  acotado? En caso afirmativo determine supremo e ínfimo.

10. Encotrar el ínfimo y el supremo de

$$A = \left\{ \frac{2n-3}{1-n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Justificando su respuesta.

11. Considere el conjunto:

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Determine el supremo e ínfimo.

12. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = |x-1| + 2$ ,  $g(x) = \frac{x}{2} + 4$ . Encuentre el supremo o ínfimo del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq f(x)\}$$

demostrando su afirmación.

13. Determine todas las raíces REALES de los siguientes polinomios:

a)  $p(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1$

b)  $q(x) = x^3 - 3x + 1$

14. Calcule los siguientes límites

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2 \tan x}{x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

15. Existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = x$ ?

16. Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$ . Graficar  $f$  indicando intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidades, puntos de inflexión, máximos y mínimos.

17. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede construir con vértices en el origen del plano cartesiano, en el eje  $X$  positivo, en el eje  $Y$  positivo y sobre la recta  $2x + y - 15 = 0$ .