Matemáticas 1.
Profesora: María Francisca Yañez.
Ayudantes: Claudia Correa, Felipe Núñez.

Guía Prueba Global

23 de Noviembre de 2010

P1. Calcule los siguientes límites

i) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}, a \in \mathbb{R}$.

ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2\tan x}{x^2}$.

iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

P2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, en cada caso determine si existe $b, c \in \mathbb{R}$ tal que f sea continua en todo su dominio.

i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+6x^2+9x}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ c & \text{si } x = -3 \\ \dfrac{x^2+9}{\sqrt{x+3}} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

ii) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-a^3}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} & \text{si } x \neq a \\ \sqrt{cx-a} & \text{si } x = a \end{cases}$$

iii) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^2} & \text{si } x > 1 \\ c & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^4-1}{x-1} - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

iv) $$f(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{ax^3+x^2+x+1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \end{cases}$$

P3. i) Determine $f'(x)$ con $f(x) = \left(x^2+2\right)^{10}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$

ii) Sea $L = \dfrac{\sqrt{\frac{a}{c}+b}}{ac+b}$.

a) Determine la razón de cambio de L con respecto a c en $c=1$.

b) Suponga que $a+b=1$. Mediante aproximación lineal estime el valor de $L(1,1)$.

P4. i) Sea $f(r) = \left(r^2+2+1\right)\left(\frac{1+3r}{1+r}\right)^{-0,4}$

a) Determine $f'(r)$.

b) Use $f'(1)$ para aproximar el valor de f en $r = 0,975$.

ii) Sea $E = \dfrac{cv^3}{v-v_0}$. Determine la razón de cambio de E con respecto a v en $v = \frac{3}{2}v_0$.

P5. i) Sea $P(t) = \left(1 - \frac{4t}{\sqrt{25-t^2}}\right)^{0,25}$

a) Determine $P'(0)$.

b) Se ha disminuido $t = 0$ en $0,001$ unidades. Use $P'(0)$ para calcular aproximadamente el cambio producido en $P(0)$.

c) Si el valor de $P(0)$ ha disminuido $0,01$ unidades, determine a partir de $P'(0)$ cuál fue el cambio producido en la variable independiente v.

ii) Sea $F = K\dfrac{\sqrt{as+1}}{s(a-s)}$. Determine la razón de cambio de F con respecto a s cuando $s = \frac{1}{a}$.

P6. La tasa de producción $p(x)$ de células sanguíneas en función de la cantidad x de células presentes se encuentra modelada por la función

$$p(x) = \frac{2x}{1+x\sqrt{x}} \qquad\qquad x \geq 0$$

Determine:

i) Los intervalos donde la tasa de producción es creciente y donde es decreciente.

ii) Dónde la tasa de prodicción crece y decrece en forma acelerada o desacelerada.

iii) Cuál es la cantidad de células para la cual la tasa de producción es máxima.

iv) Qué ocurre con la tasa de producción si la cantidad de células sigue creciendo.

v) El Gráfico de $p(x)$ de acuerdo a los resultados obtenidos.

P7. La energía potencial V de dos moléculas de gas separadas por una distancia r viene dada por

$$V(r) = -V_0\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right] \qquad\qquad r \geq 0$$

donde V_0 y r_0 son constantes positivas.

i) Determine los intervalos donde la energía potencial crece y decrece en forma acelerada o desacelerada.

ii) Determine la distancia r para la cual la energía es mínima y máxima.

iii) Si $F(r) = -\frac{dV}{dr}$, qué ocurre con la fuerza cuando las moléculas se acercan y cuando se alejan.

iv) Grafique $V(r)$ para $V_0 = 1$ y $r_0 = 0,5$.

P8. Los biomatemáticos han modelado la rapidez de producción P de la fotosíntesis en función de la intensidad luminosa I mediante la función $P(I) = \frac{aI}{b+I^2}$, $I \geq 0$, donde a y b son constantes positivas. Determine:

i) Los intervalos en que la rapidez de producción es creciente y donde es decreciente.

ii) Los intervalos en que la rapidez de producción crece y decrece en forma acelerada o desacelerada.

iii) La intensidad luminosa para la cual la rapidez de producción es máxima y mínima.

iv) Qué ocurre con la rapidez de producción si la intensidad luminosa es muy grande.

v) El Gráfico de $P(I)$ para $a = 1$ y $b = 0,25$.

P9. Para una partícula que se mueve a lo largo del eje X se tiene que su posición $x(t)$, medida en metros, con respecto a un punto P situado sobre el mismo eje viene dada por

$$x(t) = \frac{10(t-2)}{1+(t-2)^2} \qquad t \geq 0$$

Se ha convenido que si el punto se encuentra a la izquierda de P entonces $x(t) < 0$. Detrmine:

i) Los intervalos para los cuales la partícula se dirige hacia la derecha de P (x(t) crece) y hacia la izquierda de P (x(t) decrece).

ii) Los instantes en los que la partícula se encuentra más alejada de P.

iii) Cuándo la rapidez es máxima y mínima.

iv) Hacia dónde se dirige la partícula finalmente.

v) El Gráfico de $x(t)$.