UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPTO. CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION

ASIGNATURA : MATEMATICAS	MATERIAL DE APOYO
NIVEL : 1er. AÑO	PROF. L. ALTIMIRAS R.
CARRERA : DISEÑO	AYUD. C. RAMIREZ N.
AÑO : 2007	

LA ELIPSE

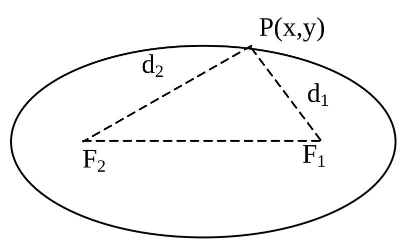
Definición :

Una Elipse se define como el Lugar Geométrico de todos los puntos del plano tales que, la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados Focos, es siempre igual a una constante positiva mayor que la distancia entre los puntos fijos.

Así, si P es un punto del plano,

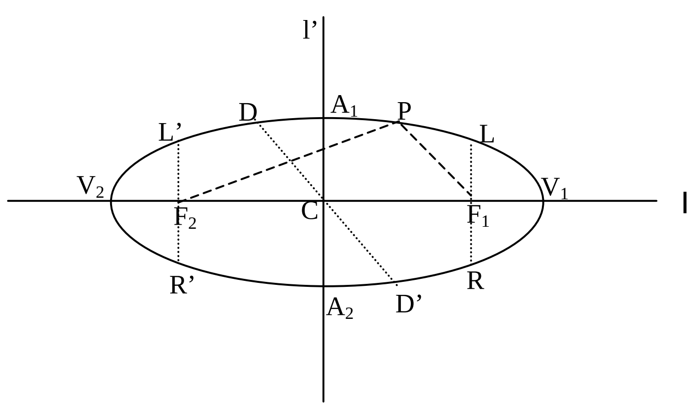
$$P \in \text{Elipse} \Leftrightarrow |\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = k \quad , \quad \text{con} \quad k > |\overline{F_1F_2}|$$

donde F_1 , F_2 = focos ; k = constante



$$|d_1 + d_2| = k$$

ELEMENTOS DE LA ELIPSE



1.- Eje Focal : Recta que contiene a los focos (**l**)

2.- Vértices : Puntos de intersección entre el eje focal y el Lugar Geométrico (Elipse) ($\mathbf{V_1}$ **;** $\mathbf{V_2}$)

3.- Cuerda : Cualquier segmento cuyos extremos pertenezcan al lugar geométrico.

4.- Centro : Punto medio del segmento que une los focos o de la cuerda que une los vértices (**C**)

5.- Eje Normal : Recta perpendicular al eje focal en el centro de la Elipse (**l'**)

6.- Eje Menor : Cuerda contenida en el eje normal y cuyo punto medio es el centro ($\overline{\mathbf{A_1A_2}}$)

7.- Eje Mayor : Cuerda definida por los vértices. Está contenida en el Eje Focal ($\overline{\mathbf{V_1V_2}}$)

8.- Lados Rectos : Cuerdas perpendiculares al eje focal en cada uno de los focos ($\overline{LR}$; $\overline{L'R'}$). El punto medio de dichas cuerdas son $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, respectivamente.

9.- Diámetro : Cualquier cuerda que pasa por el centro ($\overline{\mathbf{DD'}}$)

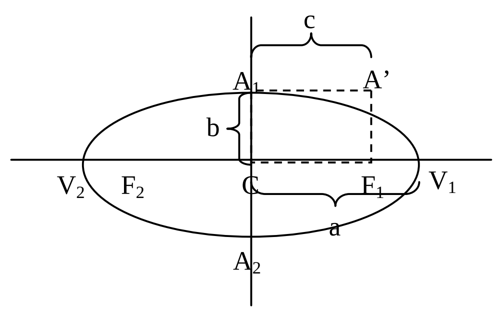
10.- Radio Vector : Segmento que une un punto cualquiera del lugar geométrico con alguno de los focos ($\overline{LF_1}$; $\overline{LF_2}$)

También en esta cónica se definen tres longitudes importantes, las que son de gran utilidad tanto en la descripción de las ecuaciones como en la construcción de su gráfica. Ellas son:

a) Longitud del Eje Mayor = $|\overline{V_1V_2}|$ = 2a

b) Longitud Eje Menor = $|\overline{A_1A_2}|$ = 2b

c) Distancia Focal = $|\overline{\mathbf{F_1F_2}}|$ = 2c

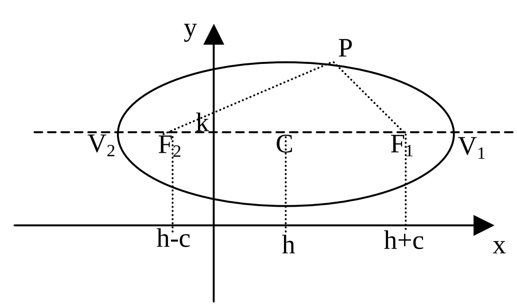


ECUACIONES CARTESIANAS DE LA ELIPSE

Teorema 1.

La ecuación de la Elipse de centro C(h , k), eje focal paralelo al eje X u horizontal, distancia focal 2c y constante positiva igual a 2a es :

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2}{\mathbf{a}^2}+\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2}{\mathbf{b}^2}=1 \quad ; \quad a > c \quad ; \quad a > b$$



Demostración.

Sea P(x , y) $\in$ Elipse $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ = 2a

Donde P(x , y) , F_1(h + c , k) y F_2(h – c , k)

Aplicando fórmula de distancia, se tiene que

$$\sqrt{(\mathbf{x}-(\mathbf{h}+\mathbf{c}))^2+(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2}+\sqrt{(\mathbf{x}-(\mathbf{h}-\mathbf{c}))^2+(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2} = 2a-\sqrt{((x-h)+c)^2+(y-k)^2}$$

$$\Rightarrow (x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2 = 4a^2+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+$$

$$(y - k)^2 \; - \; 4a\sqrt{\left((x - h) + c \right)^2 \; + \; (y - k)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 4a\sqrt{\left((x - h) + c \right)^2 \; + \; (y - k)^2} \; = \; 4a^2 \; + \; 4c(x - h)$$

Simplificando por 4 y elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, se tiene que

$$a^2 [(x - h)^2 \; + \; 2c(x - h) + c^2 \; + (y - k)^2] \; = \; a^4 \; + \; c^2(x - h)^2 + 2a^2c(x - h)$$

$$\Rightarrow \; a^2(x - h)^2 \; + \; 2a^2c(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2 \; = \; a^4 + c^2(x - h)^2 + 2a^2c(x - h)$$

Reduciendo términos semejantes, asociando convenientemente y efectuando factorizaciones adecuadas obtenemos

$$(a^2 - c^2)(x - h)^2 \; + \; a^2(y - k)^2 \; = \; a^2(a^2 - c^2) \qquad \mathbf{(*)}$$

Pero por hipótesis sabemos que $a > c \;\; \Rightarrow \; a^2 > c^2$, por lo que $a^2 - c^2 > 0$

Definimos, entonces una constante $b > 0$ tal que $b^2 = a^2 - c^2$

Reemplazando en **(∗)** , obtenemos

$$b^2(x - h)^2 \; + \; a^2(y - k)^2 \; = \; a^2b^2$$

Dividiendo la expresión anterior por a^2b^2 , obtenemos la tesis del teorema; ésto es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} \; = \; 1 \qquad\qquad \mathbf{(* *)}$$

Luego, las coordenadas de todo punto $P(x , y)$ en la elipse satisfacen la última ecuación.

Recíprocamente, si $P(x , y)$ es la solución de la ecuación **(∗ ∗),** invirtiendo los pasos anteriores se llega a demostrar que el punto $P(x , y)$ está sobre la elipse.

En forma análoga se puede demostrar el :

Teorema 2.
La ecuación de la Elipse de centro $C(h , k)$, eje focal paralelo al eje Y o vertical, distancia focal $2c$ y constante positiva igual a $2a$, es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} \; = \; 1 \qquad \text{con} \qquad a > c \;, \; a > b$$

OBSERVACIONES IMPORTANTES

1.- Las ecuaciones descritas en los teoremas 1 y 2 reciben el nombre de Ecuaciones Ordinarias de la Elipse.

2.- Si **h = k = 0**, las ecuaciones se reducen a :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ó $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, respectivamente, llamadas Ecuaciones Canónicas de la Elipse

3.- De la misma gráfica se desprende que toda elipse es simétrica con respecto a sus ejes (focal y normal), así como también con respecto a su centro.

4.- Cualquiera sea la ubicación del eje focal (paralelo al eje X u horizontal ó paralelo al eje Y o vertical) se tiene que la longitud de las cuerdas definidas como Lados Rectos, se pueden obtener por medio de la fórmula:

$$|LR| = |L'R'| = \frac{2b^2}{a}$$, teniéndose presente que

$$|\overline{LF_1}| = |\overline{RF_1}| = |\overline{L'F_2}| = |\overline{R'F_2}| = \frac{b^2}{a}$$

5.- Otro elemento importante a considerar es la **Excentricidad** de la cónica , que guarda relación con el mayor o menor aplanamiento de la elipse.

La excentricidad se define como una razón entre c y a ; es decir

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$; siendo el valor de ésta siempre **menor que la unidad**,

puesto que $a > c$ y $a > b$.

6.- Cabe hacer notar que cada diagonal del rectángulo $CF_1A'A_1$ (ver figura donde se definen las tres longitudes importantes) mide exactamente **a** unidades, equivalente a la mitad de la longitud del eje mayor, la que comprueba la relación pitagórica que existe entre las constantes **a , b** y **c,** respectivamente; esto es $\mathbf{a^2 = c^2 + b^2}$.

ECUACION GENERAL DE LA ELIPSE

Si $A \neq B$ y $AB > 0$, entonces la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa , o bien una elipse , o bien un punto aislado. La forma de verificación es trabajar algebraicamente la ecuación con el fin de poder transformarla en alguna de las ecuaciones que son descritas por los teoremas.

RESUMEN

Cualquiera sea la ecuación que adopte la elipse, es decir, independiente de que el eje focal sea paralelo al eje X o paralelo al eje Y, siempre se cumple que:

1.- Centro = C (h , k)

2.- Longitud del Eje Mayor = $|\overline{\mathbf{V_1V_2}}| = 2a$

3.- Longitud Eje Menor = $|\overline{\mathbf{A_1A_2}}| = 2b$

4.- Distancia Focal = $|\overline{F_1F_2}|$ = 2c

5.- Longitud de cada Lado Recto = $|LR|$ = $|L'R'|$ = $\dfrac{2b^2}{a}$

6.- Las constantes **a, b. c** se relacionan por la forma pitagórica $\mathbf{a^2 = c^2 + b^2}$.

7.- La excentricidad de la elipse es :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1 \quad \text{puesto que} \quad a > c \ \text{ y } \ a > b$$

Al respecto, podemos decir que mientras más cerca estén los focos del centro, la elipse tenderá a parecerse a una circunferencia.

8.- Las coordenadas de los Vértices son:

V $(h \pm a , k)$ si eje mayor es paralelo al eje X

V $(h , k \pm a)$ si eje mayor es paralelo al eje Y

i.- Las coordenadas de los Focos son:

F $(h \pm c , k)$ si eje mayor es paralelo al eje X

F $(h , k \pm c)$ si eje mayor es paralelo al eje Y