Pauta Control 11 de Matemáticas 2, el último.

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 16 de Noviembre, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija solo un problema.

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando operaciones elementales filas.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ -x + z - w = 0 \\ 2x + y - 2w = 1 \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales filas a esta última matriz, se obtiene la siguiente matriz ampliada equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto se tiene el siguiente sistema de ecuaciones equivalente a el inicial

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Por tanto el sistema tiene solución

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \land y + 2z = 1 \land w = 0\} \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = z \land y = 1 - 2z \land w = 0\} \\ &= \{(z, 1 - 2z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 1, 0, 0) + z(1, -2, 1, 0) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

2. Encuentre todas la matrices $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que conmutan con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} a &= a+c \\ a+b &= b+d \\ c &= c \\ c+d &= d \end{aligned}$$

Por tanto $a = d$ y $c = 0$. Asi el conjunto de matrices en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$