

Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Primavera, 2008.

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

1. Encuentre los valores de a que hacen que el sistema tenga solución no vacía:

$$2x - y + z = 3$$

$$5x - 3y + z = 0$$

$$3x - 2y = a$$

Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & a \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a + 3 \end{array} \right)$$

Como primera fila no es múltiplo de la segunda se tiene que el sistema tiene solución no vacía si y solo si $a + 3 = 0$. El único valor de a que hace que el sistema tenga solución no vacía es $a = -3$

6 puntos

Observación 0.1 *No hice el desglose del puntaje, pues existen muchas formas de hacerlo y todas válidas, ruego a los ayudantes a ser lo ms criteriosos posible para asignar el puntaje. Por ejemplo, no es necesario pasar por matrices para solucionar el problema, por eso me da miedo asignar puntaje al manejo matricial, pues se puede entender que eso se est valorando, lo cual no es correcto.*

2. Encuentre todas las matrices que conmutan con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ una matriz que conmuta con la matriz de arriba, entonces se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & x-y \\ z & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ -z & -w \end{pmatrix}$$

2 puntos

Comparando las componentes de la primera columna/segunda fila se tiene que $z = 0$. Comparando las componentes de primera fila/segunda columna se tiene que

$$y + w = x - y$$

$$x = 2y + w$$

2 puntos

Entonces el conjunto de todas las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2y+w & y \\ 0 & w \end{pmatrix} / y, w \in \mathbb{R} \right\}$$

2 puntos