Guía Conicas

Ejercicios Resueltos de Parabolas, Elipses y Hiperbolas

1.

¿Es $Ax^2 + By^2 = C$, con A, B, C números positivos, la ecuación de una elipse?

Solución:

Las elipses tienen la siguiente forma,

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

Sí, consideramos el caso en que están centradas en cero, debería tener la siguiente forma.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto, para probar que $Ax^2 + By^2 = C$ es una elipse, la debemos dejar de la forma anterior.

Como $C > 0$, podemos dividir por él.

$$\frac{Ax^2}{C} + \frac{By^2}{C} = 1$$

Luego, como $A, B > 0$, podemos reescribir la ecuación anteior.

$$\frac{x^2}{\frac{C}{A}} + \frac{y^2}{\frac{C}{B}} = 1$$

Finalmente, a partir de lo anterior es claro que $\frac{C}{A}, \frac{C}{B} > 0$, entonces.

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{B}}\right)^2} = 1$$

Luego, es una elipse.

2.

Dados dos puntos P y Q describa el conjunto de puntos X tales que la distancia de P a X es igual a la distancia de X a Q.

Solución:

Definimos:

$$P = (p_x, p_y)$$

$$Q = (q_x, q_y)$$

$$X = (x, y)$$

La distancia entre P y X es igual a,

$$d(P,X) = \sqrt{(x-p_x)^2 + (y-p_y)^2}$$

Y la distancia entre Q y X es igual a,

$$d(Q,X) = \sqrt{(x-q_x)^2 + (y-q_y)^2}$$

Del enunciado, igualamos las distancias.

$$d(P,X) = d(Q,X)$$

Elevamos al cuadrado para simplificar,

$$\sqrt{(x-p_x)^2 + (y-p_y)^2} = \sqrt{(x-q_x)^2 + (y-q_y)^2}$$

$$(x-p_x)^2 + (y-p_y)^2 = (x-q_x)^2 + (y-q_y)^2$$

$$x^2 - 2xp_x + p_x^2 + y^2 - 2yp_y + p_y^2 = x^2 - 2xq_x + q_x^2 + y^2 - 2yq_y + q_y^2$$

Simplificando,

$$-2xp_x + p_x^2 - 2yp_y + p_y^2 = -2xq_x + q_x^2 - 2yq_y + q_y^2$$

$$p_x^2 + y(-2p_y + 2q_y) + p_y^2 = x(-2q_x + 2p_x) + q_x^2 + q_y^2$$

$$y(-2p_y + 2q_y) = x(-2q_x + 2p_x) + q_x^2 + q_y^2 - p_x^2 - p_y^2$$

$$y = x\frac{(-2q_x + 2p_x)}{(-2p_y + 2q_y)} + \frac{q_x^2 + q_y^2 - p_x^2 - p_y^2}{(-2p_y + 2q_y)}$$

$$y = x\frac{(p_x - q_x)}{(q_y - p_y)} + \frac{q_x^2 + q_y^2 - p_x^2 - p_y^2}{(2q_y - 2p_y)}$$

Luego,

$$m = \frac{(p_x - q_x)}{(q_y - p_y)}$$

$$n = \frac{q_x^2 + q_y^2 - p_x^2 - p_y^2}{(2q_y - 2p_y)}$$

$$y = mx + n$$

Es decir, acabamos de concluir que el espacio geométrico que cumple con esta particularidad es una recta.

3.

Encuentre la ecuación de la elipse que tiene por focos a $F_1 = (2, 1)$ y $F_2 = (3, 1)$, y el semieje mayor mide 6. Grafique la elipse.

Solución:

La ecuación de la elipse es de la forma siguiente,

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

El punto medio de los focos es el centro de la elipse.

$$F_1 = (2,1)$$

$$F_2 = (3,1)$$

Definimos a PM como el punto medio entre dos puntos,

$$PM(F_1, F_2) = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$$

$$PM(F_1, F_2) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$$

Luego, como el punto medio es el centro de la elipse.

$$PM(F_1, F_2) = \left(\frac{5}{2}, 1\right) = (h, k)$$

Cuando la elipse es horizontal, se cumple la siguiente relación.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

"c" es la distancia desde los focos al centro de la elipse, que en este caso es 0,5. Al ser la elipse horizontal, el semieje mayor es "a".

$$6^2 = b^2 + (0{,}5)^2$$

$$35{,}75 = b^2$$

Luego, volviendo a la ecuación general.

$$\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{35{,}75} = 1$$

4.

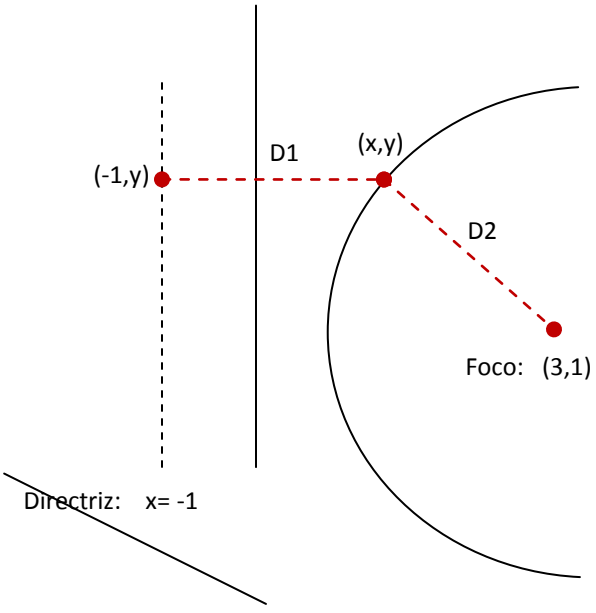
Encuentre la ecuación de la parábola de foco $(3, 1)$ y directriz $x+1 = 0$.

Solución:

La parábola se define, como *"todos los puntos tal que su distancia al foco es igual que su distancia a la directriz".*

$$F = (3{,}1)$$

Directriz, $$x = -1$$



Definimos:

$$F = (3,1)$$

$$D = (-1, y)$$

$$X = (x, y)$$

La distancia de F a X ,

$$d(F, X) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

Y la distancia entre X y la directriz,

$$d(X, D) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-y)^2}$$

Del enunciado, igualamos las distancias.

$$d(F, X) = d(X, D)$$

Elevamos al cuadrado para simplificar,

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-y)^2}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + (y-1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$-6x + 9 + (y-1)^2 = 2x + 1$$

$$(y-1)^2 = 8x - 8$$

$$(y-1)^2 = 8(x-1)$$

$$(y-1)^2 = 4 \cdot 2(x-1)$$

Parabola Horizontal:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

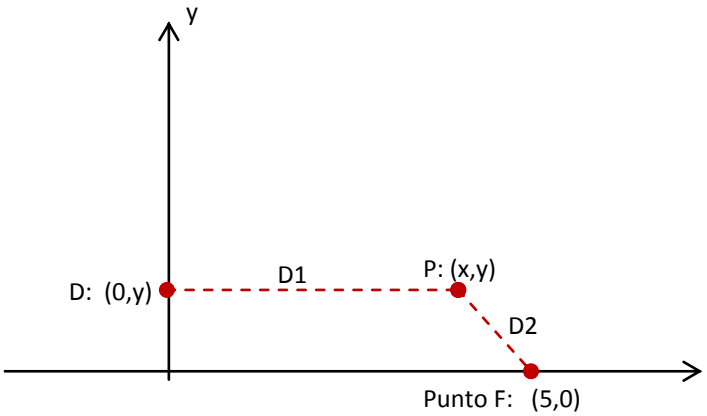
$$(h, k) = vertice\ de\ la\ parabola$$

$$p = distancia\ desde\ foco\ a\ vertice$$

5.

Grafique el conjunto de puntos P cuya distancia al eje Y es cuatro veces su distancia al punto $(5,0)$

Solución:



Definimos:

$$F = (5,0)$$

$$D = (0, y)$$

$$X = (x, y)$$

La distancia de F a X ,

$$d(F,X) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$$

Y la distancia de X a D ,

$$d(X,D) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2}$$

Del enunciado,

$$4d(F,X) = d(X,D)$$

Elevamos al cuadrado para simplificar,

$$4\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2}$$

$$16(x-5)^2 + 16y^2 = x^2$$

$$16x^2 - 160x + 16 \cdot 25 + 16y^2 = x^2$$

$$15x^2 - 160x + 16 \cdot 25 + 16y^2 = 0$$

$$15\left(x^2 - \frac{160}{15}x\right) + 16 \cdot 25 + 16y^2 = 0$$

$$15\left(\left(x - \frac{80}{15}\right)^2 - \left(\frac{80}{15}\right)^2\right) + 16 \cdot 25 + 16y^2 = 0$$

$$15\left(x - \frac{80}{15}\right)^2 - 15\left(\frac{80}{15}\right)^2 + 16 \cdot 25 + 16y^2 = 0$$

$$15\left(x - \frac{80}{15}\right)^2 + 16y^2 = 15\left(\frac{80}{15}\right)^2 - 16 \cdot 25$$

$$\frac{\left(x - \frac{80}{15}\right)^2}{\frac{15\left(\frac{80}{15}\right)^2 - 16 \cdot 25}{15}} + \frac{y^2}{\frac{15\left(\frac{80}{15}\right)^2 - 16 \cdot 25}{16}} = 1$$

$$\frac{\left(x - \frac{80}{15}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{15\left(\frac{80}{15}\right)^2 - 16 \cdot 25}{15}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{15\left(\frac{80}{15}\right)^2 - 16 \cdot 25}{16}}\right)^2} = 1$$

Es decir, el conjunto solución es una elipse.

Ahora usted grafique!

6.

Dado un punto P y una recta L describa el conjunto de puntos X tales que $d(P, X) = \frac{1}{2}d(P, L)$.

Solución:

Es súper engorroso, pero no es difícil. Tienen que ocupar el mismo procedimiento que ocupamos para los demás.

7.

Encuentre el área de una elipse de semieje mayor a y semiejemenor b.

Solución:

Una elipse de semi eje mayor “a” y semi eje menor “b”, es de la siguiente forma.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Despejando “y”,

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$y=\pm\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}$$

Nos quedamos con la solución positiva para encontrar el área bajo la curva.

$$y=\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}$$

$$y=b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Para calcular el área bajo la curva, debemos integrar desde “-a” hasta “a”. Esto nos dará el área de la mitad superior de la elipse, al multiplicar integral por dos, obtendremos el área pedida.

$$2\int_{-a}^{a} y\,dx=2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

$$2\int_{-a}^{a} y\,dx=4b\int_{0}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{x}{a}=sen(\theta)$$

$$dx = acos(\theta)d\theta$$

$$si\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = sen(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

$$si\ x = a \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{a} = sen(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\text{sen(x)})^2}\, acos(\theta)d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\theta))\, d\theta$$

$$= 2ab\left(x + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2ab\frac{\pi}{2}$$

$$área\ elipse = ab\pi$$

8.

Sean a y b números positivos fijos. Considere el conjunto

$$E = \{(acos(t), bsen(t))/\ t \in [0, 2\pi)\}.$$

¿Qué conjunto describe E?

Solución:

Sabemos que,

$$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$$

Luego, multiplicando por 1.

$$\frac{a^2}{a^2}\cos^2(x) + \frac{b^2}{b^2}\text{sen}^2(x) = 1$$

$$\frac{(\mathrm{a}\cdot\cos(x))^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{b}\cdot\operatorname{sen}(x))^2}{\mathrm{b}^2}=1$$

Esto implica que el conjunto E, describe una elipse.

9.

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $bx^2+ay^2=a^2b^2$ en el punto (x_0,y_0)?

Solución:

La ecuación de la recta se puede representar por la siguiente formula.

$$z-y_0=m(x-x_0)$$

Donde "m" es la pendiente de la recta tangente, que también es la definición de la derivada en (x0,y0).

$$m=y'(x_0)$$

Encontremos entonces la derivada,

$$bx^2+ay^2=a^2b^2$$

$$ay^2=a^2b^2-bx^2$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{a^2b^2-bx^2}{a}}$$

$$y'(x)=\pm\frac{1}{2}\frac{-\frac{2bx}{a}}{\sqrt{\frac{a^2b^2-bx^2}{a}}}$$

$$y'(x)=\pm\frac{1}{a}\frac{-bx}{\sqrt{\frac{a^2b^2-bx^2}{a}}}$$

$$y'(x_0)=\pm\frac{1}{a}\frac{-bx_0}{\sqrt{\frac{a^2b^2-bx_0{}^2}{a}}}$$

$$m=\pm\frac{1}{a}\frac{-bx_0}{\sqrt{\frac{a^2b^2-bx_0{}^2}{a}}}$$

$$m = \begin{cases} -\frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{a^2b^2 - bx_0{}^2}{a}}} & si \quad y(x_0) \geq 0 \\ \frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{a^2b^2 - bx_0{}^2}{a}}} & si \quad y(x_0) < 0 \end{cases}$$

$$z - y_0 = m(x - x_0)$$

$$z = \begin{cases} y_0 - \frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{a^2b^2 - bx_0{}^2}{a}}}(x - x_0) & si \quad y(x_0) = y_0 \geq 0 \\ y_0 + \frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{a^2b^2 - bx_0{}^2}{a}}}(x - x_0) & si \quad y(x_0) = y_0 < 0 \end{cases}$$

12.

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $bx^2 - ay^2 = a^2b^2$ en el punto (x_0, y_0)?

Solución:

La ecuación de la recta se puede representar por la siguiente formula.

$$z - y_0 = m(x - x_0)$$

Donde “m” es la pendiente de la recta tangente, que también es la definición de la derivada en (x0,y0).

$$m = y'(x_{0)}$$

Encontremos entonces la derivada,

$$bx^2 - ay^2 = a^2b^2$$

$$ay^2 = bx^2 - a^2b^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{bx^2 - a^2b^2}{a}}$$

$$y'(x) = \pm\frac{1}{2}\frac{\frac{2bx}{a}}{\sqrt{\frac{bx^2 - a^2b^2}{a}}}$$

$$y'(x) = \pm\frac{1}{a}\frac{bx}{\sqrt{\frac{bx^2 - a^2b^2}{a}}}$$

$$y'(x_0) = \pm\frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{bx_0{}^2 - a^2b^2}{a}}}$$

$$m = \pm\frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{bx_0{}^2 - a^2b^2}{a}}}$$

$$m = \begin{cases} \frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{bx_0{}^2 - a^2b^2}{a}}} & si \quad y(x_0) \geq 0 \\ -\frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{bx_0{}^2 - a^2b^2}{a}}} & si \quad y(x_0) < 0 \end{cases}$$

$$z - y_0 = m(x - x_0)$$

$$z = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{bx_0{}^2 - a^2b^2}{a}}}(x - x_0) & si \quad y(x_0) = y_0 \geq 0 \\ y_0 - \frac{1}{a}\frac{bx_0}{\sqrt{\frac{bx_0{}^2 - a^2b^2}{a}}}(x - x_0) & si \quad y(x_0) = y_0 < 0 \end{cases}$$

13.

La máxima distancia de la tierra al sol es $94,56$ millones de millas y su distancia mínima es $91,45$ millones de millas. ¿Cuánto mide el semieje mayor y menor?

Solución:

El sol es un foco y la tierra gira alrededor del sol con un movimiento elíptico.

$$a = semieje\ mayor$$

$$b = semieje\ menor$$

$$c = distancia\ desde\ foco\ al\ centro\ de\ la\ elipse$$

$$a + c = 94{,}56$$

$$a - c = 91{,}45$$

Sumando,

$$2a = 91{,}45 + 94{,}56$$

$$a = \frac{91{,}45 + 94{,}56}{2}$$

$$a = 93$$

$$c = 94{,}56 - a$$

$$c = 1{,}56$$

Cuando la elipse es horizontal, se cumple la siguiente relación.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

"c" es la distancia desde los focos al centro de la elipse, que en este caso es 1,56. Al ser la elipse horizontal, el semieje mayor es "a".

$$93^2 = b^2 + (1{,}56)^2$$

$$92{,}99 = b^2$$

Luego, volviendo a la ecuación general.

$$\frac{x^2}{93} + \frac{y^2}{92{,}99} = 1$$

14.

Grafique los siguientes conjuntos, describiendo focos, semiejes mayores y menores, directrices, vértices, asintotas, etc:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 - y^2 = 0\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2 + 4y^2 = 1\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 16x^2 - 9y^2 = 144\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2 + 9y^2 = -1\}$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x + 4y^2 = 1\}$

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 3x^2 + 6x + y^2 + 6y = 10\}$

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 5x^2 - 20x - 2y^2 + 4y = 18\}$

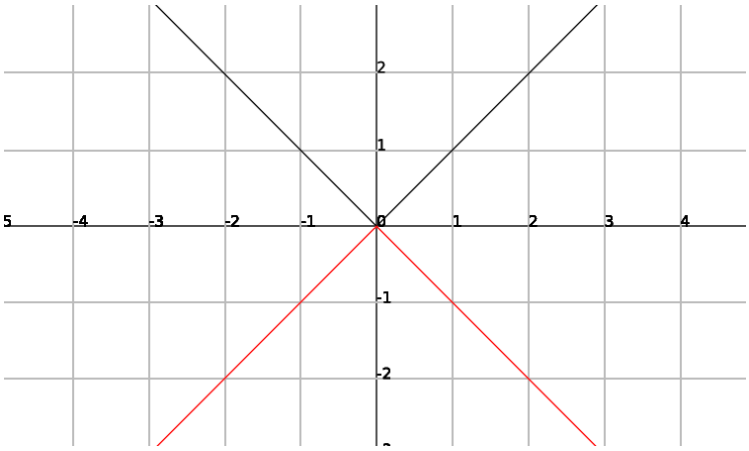
Solución:

a)

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 = y^2$$

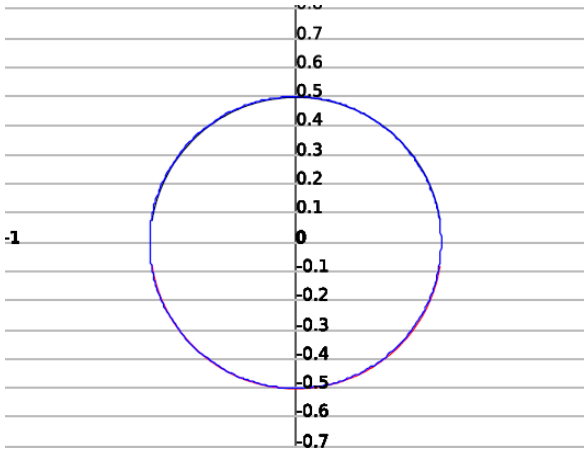
$$y = \pm|x|$$



b)

$$4x^2 + 4y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



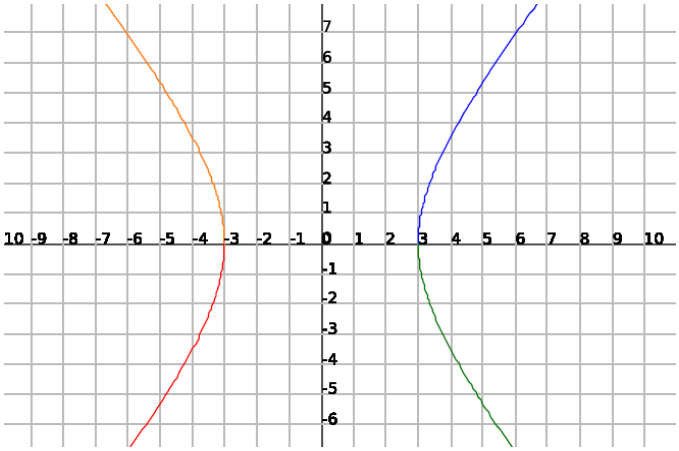
c)

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$\frac{x^2}{\frac{144}{16}} - \frac{y^2}{\frac{144}{9}} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{12}{4}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{12}{3}\right)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$



d)

$$4x^2 + 9y^2 = -1$$

$$4x^2 \geq 0$$

$$9y^2 \geq 0$$

Sumado ecuaciones anteriores,

$$4x^2 + 9y^2 \geq 0$$

Entonces, como podría

$$4x^2 + 9y^2 = -1$$

Contradicción, el espacio solución es vacio.

f)

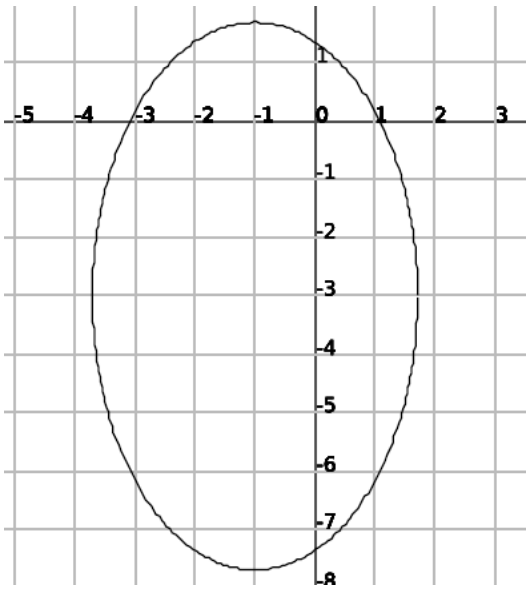
$$3x^2 + 6x + y^2 + 6y = 10$$

$$3(x^2 + 2x) + y^2 + 6y = 10$$

$$3((x+1)^2 - 1) + (y+3)^2 - 9 = 10$$

$$3(x+1)^2 + (y+3)^2 = 22$$

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{\frac{22}{3}}\right)^2} + \frac{(y+3)^2}{\left(\sqrt{22}\right)^2} = 1$$



g)

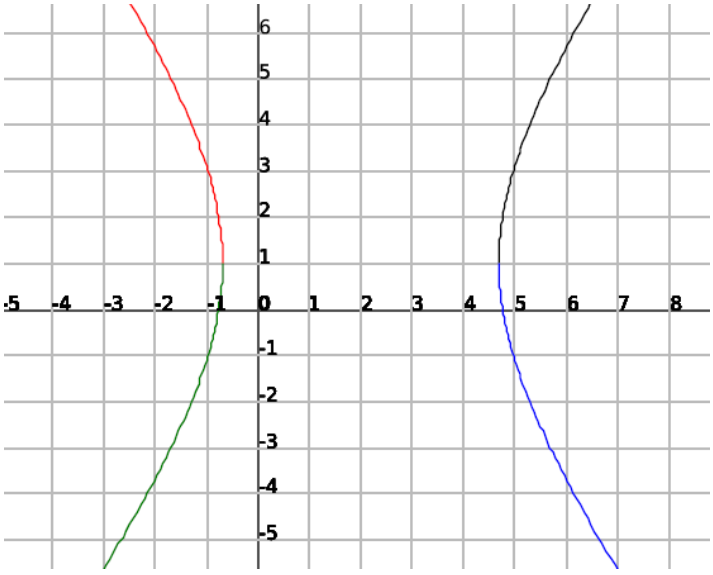
$$5x^2 - 20x - 2y^2 + 4y = 18$$

$$5(x^2 - 4x) - 2(y^2 - 2y) = 18$$

$$5((x-2)^2-4)-2((y-1)^2-1)=18$$

$$5(x-2)^2-20-2(y-1)^2+2=18$$

$$5(x-2)^2-2(y-1)^2=36$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{36}{5}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{36}{2}}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{\frac{36}{5}}\right)^2}-\frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{18}\right)^2}=1$$