Control 5 de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2009-2010

Tiempo : 30 **minutos .**

Nombre:

1. Determine si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = ln(x)$.

   Solución:

   Notar que la ecuación $e^x = ln(x)$ no tiene sentido para $x \in (-\infty, 0]$, puesto que la función $ln(x)$ no esta definida en $(0, \infty)$.

   $\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

   Si tal x existe entonces no esta en $(0, 1)$, puesto que para $x \in (0, 1)$, $ln(x) < 0$ y $e^x > 0$, asi que $e^x \neq ln(x)$, para todo $x \in (0, 1)$. Entonces si tal x existe, el esta en $[1, \infty)$.

   $\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

   Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - ln(x)$ entonces $f(1) = e$ y $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} \geq 0$, puesto que como e^x es creciente en $[0, \infty)$ entonces $1 = e^0 < e^x$ y si $1 \leq x$ se tiene que $1 \leq xe^x$, es decir $xe^x - 1 \geq 0$.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Por tanto $f(x) = e^x - ln(x)$ es creciente, es decir si $1 \leq x$ entonces $f(1) = e \leq f(x) = e^x - ln(x)$. En particular $e^x - ln(x) > 0$ para todo $x \in [1, \infty)$.
   Luego no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = ln(x)$.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Es cierto que siempre existe $B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ tal que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

En caso afirmativo calcule B.

<u>Solución:</u>

Considere

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Queremos que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ 2x-z & 2y-w \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Así se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+z &= 1 \\ y+w &= 0 \\ 2x-z &= 0 \\ 2y-w &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Ahora consideramos la matriz ampliada asociada al sistema y resolvemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \curvearrowright_{F_3+F_1(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright_{F_4+F_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego $x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{2}{3}, \quad w = -\frac{1}{3},$ Por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$