Control 2 de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2009-2010

Tiempo : 30 **minutos .**

Nombre:

1. Considere la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.
   Encuentre $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(f,P_n) - s(f,P_n) < 10^{-3}$, donde P_n es la partición regular del intervalo $[1,2]$.

   Solución:

   Sea P_n la partición regular del intervalo $[1,2]$, es decir

   $$P_n = \{1 = t_0, t_1, \dots, t_n = 2\}$$

   donde $t_k = 1 + \frac{k(2-1)}{n} = 1 + \frac{k}{n}$, con $k = 0, \dots, n$.

   $\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

   Entonces como $f(x) = x$ es una función creciente se tiene que $M_k = f(t_k) = 1 + \frac{k}{n}$ y $m_k = f(t_{k-1}) = 1 + \frac{k-1}{n}$, para todo $k = 1, \dots, n$. Ademas $t_k - t_{k-1} = \frac{1}{n}$, para todo $k = 1, \dots, n$.

   $\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

   Luego

   $$\begin{aligned} S(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{k}{n} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{k-1}{n} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por tanto

$$\begin{aligned} S(f,P_n) - s(f,P_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{k}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{k-1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) - \left(1 + \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Se quiere que encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(f,P_n) - s(f,P_n) < 10^{-3}$, es decir $\frac{1}{n} < 10^{-3}$ entonces $\frac{1}{10^{-3}} < n$ o sea que $10^3 < n$. Por tanto basta tomar $n = 1001$ y se tiene lo pedido.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

2. Considere la recta $L : y = -\frac{9}{2}$ y la elipse definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Llamamos F al foco de la elipse determinado por $-c$ (recuerde que $c > 0$).
Describa el conjunto

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d((x,y),F)}{d((x,y),L)} = \frac{2}{3} \right\}.$$

Solución:

Como se tiene que $9 > 5$ entonces los focos de la elipse estan situados en el eje Y.

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Para calcular el valor de c que determina los focos, recordamos que

$$5 = 9 - c^2$$

Asi se tiene que $c = 2$. Luego las coordenadas de los focos estan dadas por $(0, c)$ y $(0, -c)$ y por tanto $F = (0, -2)$.

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Ahora determinemos el conjunto C.
Para un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} d((x,y),F) &= \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d((x,y),L) &= \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(y + \frac{9}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Ahora si $(x, y) \in C$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + (y+2)^2}}{\sqrt{\left(y + \frac{9}{2}\right)^2}} &= \frac{2}{3} \qquad |()^2 \\ \frac{x^2 + (y+2)^2}{\left(y + \frac{9}{2}\right)^2} &= \frac{4}{9} \\ 9(x^2 + y^2 + 4y + 4) &= 4\left(y^2 + 9y + \frac{81}{4}\right) \\ 9x^2 + (9-4)y^2 &= 81 - 36 \\ 9x^2 + 5y^2 &= 45 \qquad | \cdot \frac{1}{45} \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Por lo tanto como todos los pasos son reversibles, se tiene

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}.$$

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$