

Nombre:**Curso:**

1. El criterio de la integral dice que si $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es positiva, decreciente e integrable en $[2, R]$, $\forall R > 2$ y si $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ entonces la integral $\int_2^\infty f(x)dx$ converge si y solo si $\sum_{n=2}^\infty a_n$ converge. Considera f y a_n como arriba y resuelve los siguientes problemas:

- a) Demuestra que si $\int_2^\infty f(x)dx = L$ y $\sum_{n=2}^\infty a_n = M$, entonces se cumple que

$$M - f(2) \leq L \leq M$$

Solución:

Por la decrecencia de f se tiene que

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=2}^n f(k+1) \leq \int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^n f(k)$$

Por lo tanto

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \sum_{k=2}^\infty f(k) = M$$

Por lo tanto la sucesión $\int_1^{n+1} f(x)dx$ está acotada superiormente por M , por lo tanto $\int_1^\infty f(x)dx \leq M$.

Por otra parte

$$\sum_{k=2}^n f(k+1) \leq \int_2^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^\infty f(x)dx$$

Luego la sucesión $\sum_{k=2}^n f(k+1)$ está acotada superiormente por L luego

$$\sum_{k=2}^\infty f(k+1) \leq L$$

es decir

$$M - f(2) \leq L \quad \blacksquare$$

b) Muestra que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$ converge.

Solución:

La función $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x \log^2(x)}$ es positiva, pues x y $\log^2(x)$ lo son en $[2, \infty)$. Además f es diferenciable, por lo tanto continua y por lo tanto integrable en $[2, R]$, $\forall R > 2$. Además

$$f'(x) = -\frac{\log^2(x) + \log(x)}{x^2 \log^4(x)} < 0, \quad \forall x \geq 2$$

Por lo tanto f es decreciente.

Además el valor de la integral

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{\frac{1}{x}}{\log^2(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{\log(R)} + \frac{1}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$$

Por el criterio de la integral la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$ converge.

c) Usa a) y b) para mostrar que

$$\frac{1}{\log(2)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} \leq \frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{2 \log^2(2)}$$

Solución:

Por a) y por b) se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} - \frac{1}{2 \log^2(2)} \leq \frac{1}{\log(2)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$$

Luego:

$$\frac{1}{\log(2)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} \leq \frac{1}{2 \log^2(2)} + \frac{1}{\log(2)} \quad \blacksquare$$

Nombre:**Curso:**

2. Considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = \sqrt{5}$ y

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5}$$

- a) Demuestra que (a_n) es acotada superiormente por 5.

Solución:

Notar que la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente. Por lo tanto si $0 \leq a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Entonces como $5 < 25$ se tiene que $a_1 = \sqrt{5} < 5$. Si suponemos $a_n < 5$ entonces

$$4a_n < 20$$

$$4a_n + 5 < 25$$

$$\sqrt{4a_n + 5} < 5$$

$$a_{n+1} < 5$$

Entonces por inducción hemos demostrado que (a_n) es acotada superiormente por 5. ■

- b) Demuestra que (a_n) es creciente.

Solución:

Como $5 + \sqrt{5} > 5$, se tiene que $\sqrt{5 + \sqrt{5}} > \sqrt{5}$. Es decir $a_2 > a_1$
Si suponemos $a_n < a_{n+1}$ entonces

$$4a_n < 4a_{n+1}$$

$$4a_n + 5 < 4a_{n+1} + 5$$

$$\sqrt{4a_n + 5} < \sqrt{4a_{n+1} + 5}$$

$$a_{n+1} < a_{n+2}$$

Entonces por inducción hemos demostrado que (a_n) es creciente
■

- c) Usa a) y b) para justificar que la sucesión converge y encuentra el valor del límite.

Solución:

Como toda sucesión creciente y acotada es convergente, entonces por a) y por b) se tiene que la sucesión definida como arriba converge. Además como (a_n) es creciente, se tiene que $a_1 \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ y por a) se tiene que

$$\sqrt{5} \leq a_n \leq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces si $\lim a_n = L$, se tiene que $L \in [\sqrt{5}, 5]$, además L satisface la relación

$$L = \sqrt{4L + 5}$$

$$L^2 = 4L + 5$$

$$L^2 - 4L - 5 = 0$$

$$(L - 5)(L + 1) = 0$$

Como $L + 1 > 0$ se tiene que $L = 5$. ■

Nombre:**Curso:**

3. Miscelánea (Elija 2 de 3)

- a) Aproxima $\sin(1)$ por un número racional con un error menor que 10^{-3}

Solución:

El error de Taylor de la función seno de orden $2n+1$ centrado en 0 y evaluado en 1 es:

$$E_{2n+1} = \left| \frac{\sin^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} \right|, \text{ con } \xi \in (0, 1)$$

Como $|\sin^{2n+2}(\xi)| = |\sin(\xi)| \leq 1$ se tiene que:

$$E_{2n+1} \leq \frac{1}{(2n+2)!},$$

Si $n = 3$ se tiene que:

$$E_7 \leq \frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} < 10^{-3},$$

Luego

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$

es un número racional que aproxima a $\sin(1)$ con un error menor que 10^{-3} . ■

- b) Encuentra la serie de Taylor centrada en cero de

$$f(x) = \log(1+x^2).$$

Indica el intervalo de convergencia.

Solución:

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

Integrando término a término se tiene que:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

Paro si evaluamos la suma anterior en $x = 1$ se obtiene la serie de números:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

que es convergente, pues es la serie alternada de $\frac{1}{n+1}$ que es positiva, decreciente y converge a cero. Por lo tanto:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1]$$

Evaluando en x^2 se tiene:

$$\log(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}, \quad x^2 \in (-1, 1]$$

Pero $x^2 \in (-1, 1] \Leftrightarrow x^2 \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$, entonces

$$\log(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}, \quad x \in [-1, 1]. \quad \blacksquare$$

c) Encuentra el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$$

Solución:

Si $a_n = \frac{n!}{n^n}$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Luego

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es e ■