Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Noviembre, 2007.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija entre 1 y 2

1. Encuentre un intervalo I y una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tal que sea igual a la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{3-x}$.

Solución:

Notemos primero que si $x \neq 3$ se tiene que

$$\frac{2x}{3-x} = \frac{2x}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right]$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Además sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

si y solamente si $r \in (-1, 1)$.

Haciendo $r = \frac{x}{3}$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

si y solo si $\frac{x}{3} \in (-1, 1)$, o equivalentemente $x \in (-3, 3)$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

Luego la función $f:(-3,3)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{2x}{3-x}$ se puede escribir como

$$f(x)=\frac{2x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}}x^{n+1}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}x^n$$

2. Encuentre la serie de Taylor centrada en cero de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=sen(x)+senh(x)$.

<u>Solución:</u>

Notamos primero que

$$senh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}(\sum\frac{x^n}{n!}-\sum\frac{(-1)^nx^n}{n!})=\frac{1}{2}(\sum\frac{x^n}{n!}-\frac{(-1)^nx^n}{n!})$$
$$=\sum(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}$$

Pero $1-(-1)^n=0$ si n es par y $1-(-1)^n=2$ si n es impar. Por lo tanto

$$senh(x)=\frac{1}{2}(2\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})=\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por otra parte sabemos que

$$sen(x)=\sum\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Por lo tanto

$$f(x)=\sum\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=\sum((-1)^n+1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Pero $(-1)^n + 1 = 2$ si n es par y $(-1)^n + 1 = 0$ si n es impar. Por lo tanto:

$$f(x) = 2 \sum \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$