Noveno Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 16 de Octubre de 2007.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija **un** problema de entre los siguientes.

1. Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos y $\sum a_n$ es convergente. Demuestra que $\sum (a_n)^2$ también es convergente.

   Solución:

   Como $\sum a_n$ es convergente, implica que $(a_n) \to 0$, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
   $$0 \leq a_n < 1, \quad \forall n \geq N$$

   $$\boxed{\text{3 puntos}}$$

   Por lo tanto, si $n \geq N$ se tiene que
   $$0 \leq (a_n)^2 \leq a_n,$$

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Así se tiene, por criterio de comparación directa que
   $$\sum (a_n)^2, \qquad \text{converge.}$$

   $$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Decida si la serie converge
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

   Solución:

Consideremos la sucesión positiva

$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

El cuociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2}{e} < 1$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por lo tanto, utilizando el criterio del cuociente se tiene que

$$\sum a_n, \quad \text{converge}$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$