

Pauta Control 6 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 5 de Octubre, 2010

Tiempo : 15 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema.

Solo para el curso B, no elegir, resolver los dos problemas.

1. Demuestre que la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4(1+x^4)} dx$$

converge.

Solución:

Notemos que para todo $x \geq 1$, se tiene que

$$0 \leq x^4 \leq x^4 + x^8 = x^4(1+x^4)$$

entonces

$$0 \leq \frac{1}{x^4(1+x^4)} \leq \frac{1}{x^4}$$

Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \int_1^{\infty} x^{-4} dx$$

converge, por criterio de comparación se tiene que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4(1+x^4)} dx$$

converge.

2. Demuestre que la integral impropia

$$\int_0^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx$$

diverge.

Solución:

Notemos que $\frac{1}{(x-7)^2}$ tiene punto de discontinuidad infinita en el intervalo $[0, 11]$, a saber en el punto $x = 7$ entonces

$$\int_0^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx = \int_0^7 \frac{1}{(x-7)^2} dx + \int_7^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx$$

donde

$$\int_0^7 \frac{1}{(x-7)^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 7^-} \int_0^\epsilon \frac{1}{(x-7)^2} dx$$

y

$$\int_7^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 7^+} \int_\epsilon^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^7 \frac{1}{(x-7)^2} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 7^-} \int_0^\epsilon \frac{1}{(x-7)^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 7^-} \left. \frac{-1}{x-7} \right|_0^\epsilon \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 7^-} \frac{-1}{\epsilon-7} - \frac{1}{7} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_7^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 7^+} \int_\epsilon^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 7^+} \left. \frac{-1}{x-7} \right|_\epsilon^{11} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 7^+} \frac{-1}{4} + \frac{1}{\epsilon-7} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Por tanto $\int_0^7 \frac{1}{(x-7)^2} dx$ y $\int_7^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx$ divergen lo que implica que

$$\int_0^{11} \frac{1}{(x-7)^2} dx$$

diverge.