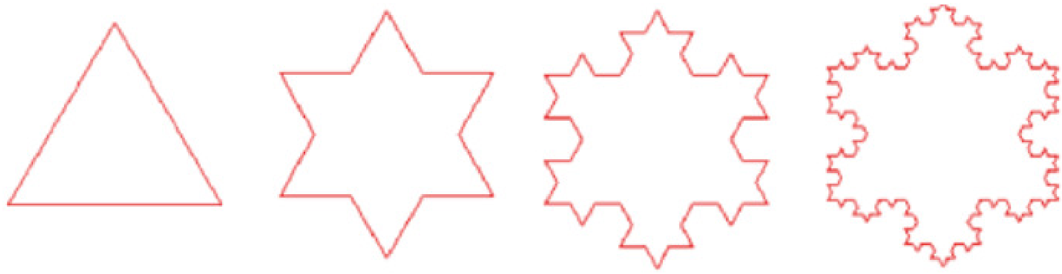
Guía de Sucesiones 2.0

1. Cada lado de un triángulo equilatero de lado 1, se divide en tres partes iguales, en la parte central de cada lado se construye otro triángulo equilatero de lado $\frac{1}{3}$ y la base es borrada, en el siguiente paso cada trazo de largo $\frac{1}{3}$ se divide en tres partes iguales y se forma un triángulo equilatero y le borramos la base y así sucesivamente. Si l_n es la sucesión que cuenta la cantidad de lados de la $n-$ésima figura, encuentra una expresión para l_n. Encuentra una expresión para el perímetro de la figura n. Si A_n es el área de la figura del $n-$ésimo paso. ¿Cuál es el límite de A_n?



Solución:

Como se especifica en el enunciado,

l_n : es la cantidad de lados en la figura n-ésima.

Es claro que la primera figura tiene 3 lados, es decir $l_1 = 3$

Ahora, se observa que cada lado se divide en cuatro lados, con esto tenemos $l_2 = 3 \cdot 4$

Siguiendo la misma lógica de división de lados anterior, $l_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$

En resumen,

$$l_1 = 3$$

$$l_2 = 3 \cdot 4$$

$$l_3 = 3 \cdot 4^2$$

$$l_4 = 3 \cdot 4^3$$

Iterando,

$$l_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

Para encontrar una expresión para el perímetro de la figura, necesitamos el largo de cada lada en cada figura, de manera de multiplicar el largo de cada lado por la cantidad de lados y obtener el perímetro.

Definamos una sucesión que determine el largo de cada lado en cada figura.

$LARGO_n$: es el largo del lado en la figura n-ésima.

Es claro, que la primera figura 1 tiene largo igual a uno (por enunciado), es decir $LARGO_1 = 1$

Ahora, se observa que cada lado se divide en tres partes, con esto tenemos $LARGO_2 = \frac{1}{3}$

Cada lado es dividido por tres en cada iteración, $LARGO_3 = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

En resumen,

$$LARGO_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$LARGO_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$LARGO_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Iterando,

$$LARGO_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Luego,

P_n: Perimetro de la n-ésima figura.

$$P_n = l_n \cdot LARGO_n$$

$$P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

¿Cuál es el limite de P_n?

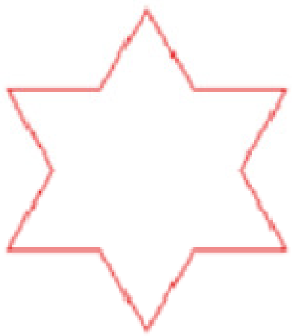
$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \infty$$

Encontremos una expresión para A_n.

El área de un triangulo equilátero de lado *a*, es $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Es claro que la primera figura con *a = 1*, tiene área igual a $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

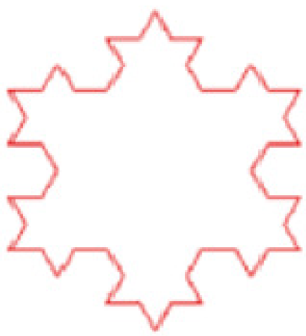
Al observar la figura 2,



Se debe prestar atención a que la nueva figura contempla el área de la figura anterior y además suma tres nuevos triángulos equiláteros de lado igual a $\frac{1}{3}$.

Es decir, $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Donde el "3" corresponde al numero de triángulos nuevos y el $\frac{1}{3}$ al lado de los triángulos nuevos.



Es decir, $A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + (3 \cdot 4) \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Donde el "3*4" corresponde al numero de triángulos nuevos y el $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ es el largo del lado de los triángulos nuevos.

Generalicemos,

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + (3\cdot 4)\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + (3\cdot 4^2)\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \cdots + (3\cdot 4^{n-2})\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + (3\cdot 4)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\frac{\sqrt{3}}{4} + (3\cdot 4^2)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\frac{\sqrt{3}}{4} + \cdots + (3\cdot 4^{n-2})\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{i=0}^{n-2} 4^i\left(\frac{1}{3}\right)^{2i+2}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{i=0}^{n-2} 4^i\left(\frac{1}{9}\right)^{i+1}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{i=0}^{n-2} 4^i\left(\frac{1}{9}\right)^{i}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{4}{9}\right)^{i}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}}\right]$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

Finalmente, obtengamos el límite de la sucesión A_n.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Lo interesante de estos problemas es que el perímetro diverge, en contraposición al área de la figura que converge.

10. Encuentre un conjunto finito de términos de la sucesión $a_n = \frac{3n+\pi}{n}$, que contenga a todos los términos de la sucesión que están fuera del intervalo $(3 - 10^{-6}, 3 + 10^{-6})$.

Solución:

Es claro que la sucesión $a_n = 3 + \frac{\pi}{n}$ converge a "3".

Si a_n converge a 3 implica que,

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in R$ para todo $n \geq n_0$, con $|a_n - 3| \leq \varepsilon$

También es relativamente claro que nuestra épsilon impuesta es $\varepsilon = 10^{-6}$.

Luego,

$$|a_n - 3| \leq 10^{-6}$$

$$\left|3 + \frac{\pi}{n} - 3\right| \leq 10^{-6}$$

$$\left|\frac{\pi}{n}\right| \leq 10^{-6}$$

$$\frac{\pi}{n} \leq 10^{-6}$$

$$\pi 10^6 \leq n$$

El *n* que acabamos de encontrar, nos asegura estar dentro del intervalo, desde este punto de vista estar afuera,

$$n < \pi 10^6$$

14. Considera la sucesión $a_n = \frac{3n+5}{n-5}$. Determina $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$ se cumpla que $a_n \in (3 - 10^{-2}, 3 + 10^{-2})$

Solución:

Es claro que la sucesión $a_n = \frac{3n+5}{n-5}$ converge a "3".

Si a_n converge a 3 implica que,

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in R$ para todo $n \geq n_0$, con $|a_n - 3| \leq \varepsilon$

También es relativamente claro que nuestra épsilon impuesta es $\varepsilon = 10^{-2}$.

Luego,

$$|a_n - 3| \leq 10^{-2}$$

$$\left|\frac{3n+5}{n-5}-3\right| \leq 10^{-2}$$

$$\left|\frac{3n+5-3n+15}{n-5}\right| \leq 10^{-2}$$

$$\left|\frac{20}{n-5}\right| \leq 10^{-2}$$

Impongamos un $n > 5$ para poder eliminar el valor absoluto,

$$\frac{20}{n-5} \leq 10^{-2}$$

$$n_0 = 20 \cdot 10^2 + 5 \leq n$$

El *n* que acabamos de encontrar, nos asegura estar dentro del intervalo.

16. Si (a_n) converge a cero y (b_n) es acotada. Demuestra que $(a_n b_n)$ converge a cero.

Solución:

Definición 7.3 (Convergencia). *Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \to \ell$) si se cumple que:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Si a_n converge a cero implica que,

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in R$ para todo $n \geq n_0$, con $|a_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{M}$

Si b_n es acotada implica que, existe $M \in R$ con $|b_n| \leq M$ para todo $n \quad \in \aleph$

Multiplicando las dos ecuaciones,

$$|a_n - 0||b_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in R$ para todo $n \geq n_0$, con $|a_n b_n - 0| \leq \varepsilon$

Esto, implica que $a_n b_n$ converge a cero.

17. Si $0 < r < 1$ demuestra que la sucesión $a_n = nr^n$ converge a cero.

Solución:

Consideremos $r = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ (cumple la misma condición que la del enunciado).

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{b^n}$$

Se obtiene infinito tanto en el denominado, como en el numerador.

Deberíamos aplicar la regla del L' Hopital, pero primero es necesario convertir la sucesión en una función. Con $a_n = f(n)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{b^x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{b^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x)'}{(b^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{b^x \ln(b)} = 0$$