Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Octubre, 2008.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema entre los siguientes y resuélvalo:

1. Encuentra el límite de la sucesión

$$a_n = n\left(1 - cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Solución:

Sabemos del curso Matemáticas I que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Por tanto como $a_n = \dfrac{1}{n}$ tiende a cero se tiene que:

$\boxed{\text{1 punto}}$

$$f(a_n) \to f(0)$$

es decir,

$$\frac{1 - cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to f(0) = 0$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

es decir,

$$a_n = n\left(1 - cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0$$

$\boxed{\text{3 puntos}}$

Observación 0.1 *En esta solución usamos el teorema:*

Teorema 0.1 *La función f es continua en a si y solamente si para cualquier sueción a_n que converge a a la sucesión $f(a_n)$ converge a $f(a)$.*

Solución alternativa:

Como la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\left(1 - cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ es continua

$\boxed{\text{1 punto}}$

y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1 - cos(y)}{y} = 0$$

$\boxed{\text{3 punto}}$

se tiene que

$$\lim f(n) = 0$$

es decir

$$\lim n\left(1 - cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Observación 0.2 *En esta solución usamos el teorema:*

Teorema 0.2 *Si la función* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *es continua y*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

entonces la sucesión $a_n = f(n)$ *converge a* L.

2. Sea (a_n) una sucesión que converge a cero. Demuestra que

$$b_n = a_n \sin(\sqrt{n^2+1})$$

también converge a cero.

Solución:

Como $0 \leq |\sin(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$0 \leq |a_n \sin(\sqrt{n^2+1})| \leq |a_n|$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

Como $a_n \to 0$ es equivalente a $|a_n| \to 0$ y utilizando el Lema del sandwich se tiene que

$$|b_n| \to 0$$

o equivalentemente

$$b_n \to 0$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$