Pauta Control 5 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 7 de Septiembre, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija solo un problema.

1. Considere $0 < b < 1$. Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 b^x$$

<u>Solución:</u>

Notemos que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 b^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{b^{-x}}$$

Entoces vemos que si $x \to \infty$ entonces $x^2 \to \infty$ y $b^{-x} \to \infty$, puesto que $0 < b < 1$.
Luego la expresión $\frac{x^2}{b^{-x}}$ es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to \infty$ y por tanto podemos aplicar regla de L'Hopital para calcular el límite.
Así, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{b^{-x}} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-ln(b)b^{-x}} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{(ln(b)^2 b^{-x}} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Considere $a > 0$. Determine

$$\int \frac{a^x}{a^{2x} + a^x - 2} dx$$

<u>Solución:</u>

Sea $u = a^x$ entonces $du = a^x ln(a)dx$. Por tanto

$$\int \frac{a^x}{a^{2x} + a^x - 2} dx = \frac{1}{ln(a)} \int \frac{a^x ln(a)dx}{a^{2x} + a^x - 2} = \frac{1}{ln(a)} \int \frac{du}{u^2 + u - 2}$$

Notemos que $u^2 + u - 2 = (u+2)(u-1)$ entonces

$$\frac{1}{(u+2)(u-1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u-1}$$

Esto implica que $A+B = 0$ y $-A+2B = 1$ entonces $A = -\frac{1}{3}$ y $B = \frac{1}{3}$.
Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u^2+u-2} &= \int \left(-\frac{1}{3(u+2)} + \frac{1}{3(u-1)} \right) du \\
&= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{u+2} du + \frac{1}{3} \int \frac{1}{u-1} du \\
&= -\frac{1}{3} ln|u+2| + \frac{1}{3} ln|u-1| + c \\
&= -\frac{1}{3} ln|a^x+2| + \frac{1}{3} ln|a^x-1| + c
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int \frac{a^x}{a^{2x}+a^x-2} dx = \frac{1}{ln(a)} \left(-\frac{1}{3} ln|a^x+2| + \frac{1}{3} ln|a^x-1| + c \right)$$

con $c \in \mathbb{R}$.